# Théorème de Fejér

Gourdon, *Analyse*, page 282

**Exercice :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $2\pi$-périodique. On note pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{ikx} \end{array}$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les fonctions

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k \quad ; \quad C_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots S_n}{n+1}$$

$$\widetilde{S_n} = \sum_{k=-n}^{n} e_k \quad ; \quad \widetilde{C_n} = \frac{\widetilde{S_0} + \widetilde{S_1} + \dots \widetilde{S_n}}{n+1}$$

Alors :

1. Vérifier que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{C_n}(t)dt = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que pour tout $\alpha \in ]0,\pi[$, la suite de fonction $(\widetilde{C_n})$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi,\pi]\backslash[-\alpha,\alpha]$.
3. En déduire le *Théorème de Fejér* : la suite de fonctions $(C_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $\mathbb{R}$.

1. On a
$$\forall k \in \mathbb{Z}^*,\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_0(t)dt = 1$$
On en conclut alors que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{S_n}(t)dt = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{C_n}(t)dt = 1 = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{S_k}(t)dt = 1\right) = 1$$

2. On a, par un calcul classique, que si $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \widetilde{S_n}(x) = e^{-inx}\frac{e^{(2n+1)ix}-1}{e^{ix}-1} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$
et comme
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} e^{\left(\frac{k+1}{2}\right)ix} = e^{ix}\frac{e^{(n+1)ix}-1}{e^{ix}-1} = e^{\frac{(n+1)}{2}ix}\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$
On en déduit, en prenant la partie imaginaire, que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \widetilde{C_n}(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{S_k}(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$
On en conclut que si $0 < \alpha < \pi$,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\pi,\pi], |x| > \alpha, \quad \left|\widetilde{C_n}(x)\right| \leq \frac{1}{(n+1)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$
Cela suffit pour montrer que $(\widetilde{C_n})$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi,\pi]\backslash[-\alpha,\alpha]$.

3. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widetilde{S_n}(x-t) dt$$

donc

$$C_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widetilde{C_n}(x-t) dt$$

Le changement de variable $u = x - t$, conjugué au caractère $2\pi$-périodique des fonctions intégrées entraîne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \widetilde{C_n}(u) du$$

Prouvons alors la convergence uniforme de $(C_n)$ vers $f$. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $f$ est continue et $2\pi$-périodique, elle est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne :

$$\exists \alpha \in ]0, \pi[ \ / \ forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

En désignant par $M$ un majorant de $|f$ sur $\mathbb{R}$, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - C_n(c)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x-t) - f(x) \right) \widetilde{C_n}(t) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} 2M \widetilde{C_n}(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varepsilon \widetilde{C_n}(t) dt \\
&\leq \frac{2M}{2\pi} \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} 2M \widetilde{C_n}(t) dt + \varepsilon
\end{aligned}$$

et comme $(\widetilde{C_n})$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi] \backslash [-\alpha, \alpha]$,

$$\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \ \int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} \widetilde{C_n}(t) dt \leq \varepsilon$$

de sorte que $|f(x) - C_n(x)| \leq \left( \frac{M}{\pi} \right) \varepsilon + \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq N$. D'où le résultat.