Théorème d'inversion locale

Monier, *Analyse MP*, page 547

> **Théorème :** Soient E,F deux $\mathbb{R}$-evn de dimensions finies, et soit U un ouvert de E. Soit également $\varphi : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$.
> Si $d_a\varphi$ est bijective, alors :
>
> - $\dim(E) = \dim(F)$
> - Il existe un voisinage ouvert V de a dans E tel que φ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur $\varphi(V)$.

Preuve : En munissant E et F de bases, il est clair qu'on peut se ramener au cas où $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^n$, munis de leurs bases canoniques et de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Comme $d_a\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est linéaire bijective, on a nécessairement $p = n$.

Montrons qu'on peut se ramener au cas où $d_a\varphi = Id_{\mathbb{R}^n}$.

Notons $T = d_a\varphi \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$. Alors T^{-1} existe et $T^{-1} \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$, donc $d_{\varphi(a)}T^{-1} = T^{-1}$. On en déduit que $T^{-1} \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et

$$d_a\left(T^{-1} \circ \varphi\right) = \left(d_{\varphi(a)}T^{-1}\right) \circ (d_a\varphi) = T^{-1} \circ T = Id_{\mathbb{R}^n}$$

Si le théorème est démontré pour $T^{-1} \circ \varphi$, il existe un voisinage ouvert V de a dans E tel que $T^{-1} \circ \varphi$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur $(T^{-1} \circ \varphi)(V)$; il est clair qu'alors φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur $\varphi(V)$, puisque $\varphi = T \circ (T^{-1} \circ \varphi)$ et que T est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $(T^{-1} \circ \varphi)(V)$ sur $\varphi(V)$.

Montrons qu'on peut aussi se ramener au cas où $a = 0$ et $\varphi(a) = 0$

Considérons $\psi : h \mapsto \varphi(a + h = -\varphi(a)$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U_0 = \{h \in \mathbb{R}^n ; a + h \in U\}$. Comme $d_0\psi = d_a\varphi$, $d_0\psi$ est bijective.

Si le théorème est démontré pour ψ, il existe un voisinage ouvert V_0 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que ψ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V_0 sur $\psi(V_0)$. Il est clair qu'alors φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $V = \{x \in \mathbb{R}^n ; x - a \in V_0\}$ sur $\varphi(V) = \{y \in \mathbb{R}^n ; y - \varphi(a) \in \psi(V_0)\}$.

Ceci montre qu'on peut se ramener au cas (plus commode) où $a = 0$, $\varphi(a) = 0$, $d_a\varphi = Id_{\mathbb{R}^n}$

Construction d'une bijection.

L'application $g : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & x - \varphi(x) \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $d_0 g = 0$. Notons $g_1, \dots, g_n$ les applications composantes de g : $\forall x \in U, g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$.

Puisque g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et que $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(0) = 0$, il existe $r > 0$ tel que

$$\begin{cases} \overline{B(0,r)} \subset U \\ \forall x \in \overline{B(0,r)}, \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \left|\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right| \leq \dfrac{1}{2n} \end{cases}$$

g_i est donc lipschitzienne et $\forall x \in \overline{B(0,r)}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |g_i(x)| = |g_i(x) - g_i(0)| \leq n\dfrac{1}{n}\|x\|_\infty \leq \dfrac{r}{2}$

D'où $\|g(x)\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |g_i(x)| \leq \dfrac{r}{2}$. Ceci prouve que $\forall x \in \overline{B(0,r)}$, $g(x) \in \overline{B\left(0, \dfrac{r}{2}\right)}$

Soit $y \in \overline{B\left(0, \dfrac{r}{2}\right)}$. Considérons $g_y : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & y + g(x) \end{array}$.

Pour tout x de $\overline{B(0,r)}$, on a

$$\|g_y(x)\|_\infty = \|y + g(x)\|_\infty \leq \|y\|_\infty + \|g(x)\|_\infty \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

Ainsi $\forall x \in \overline{B(0,r)}$, $g_y(x) \in \overline{B(0,r)}$. Pour tout $(x_1, x_2) \in \left(\overline{B(0,r)}\right)^2$, on a comme plus haut g qui sera lipschitzienne :

$$\|g_y(x_1) - g_y(x_2)\|_\infty = \|g(x_1) - g(x_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|_\infty$$

Ceci montre que l'application $h_y : \begin{array}{ccc} \overline{B(0,r)} & \to & \overline{B(0,r)} \\ x & \mapsto & g_y(x) \end{array}$ est contractante. Comme $\overline{B(0,r)}$ est complète (car fermée dans un evn de dimension finie), le théorème du point fixe montre que h_y admet un point fixe et un seul. Puisque $h_y(x) = x \Leftrightarrow y = \varphi(x)$, on conclut :

$$\forall y \in \overline{B\left(0, \frac{r}{2}\right)},\ \exists ! x \in \overline{B(0,r)}\ /\ \varphi(x) = y$$

Ainsi, $\varphi^{-1}\left(\overline{B\left(0, \frac{r}{2}\right)}\right) \subset \overline{B(0,r)}$ et l'application $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \varphi^{-1}\left(\overline{B\left(0, \frac{r}{2}\right)}\right) & \to & \overline{B\left(0, \frac{r}{2}\right)} \\ x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$ est une bijection.

Continuité de φ_1.

Soit $(x_1, x_2) \in \left(\overline{B(0,r)}\right)^2$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \|x_1 - x_2\| & = & \|(\varphi(x_1) + g(x_1)) - (\varphi(x_2) + g(x_2))\| \\ & \leq & \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| + \|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \end{array}$$

d'où $\|x_1 - x_2\| \leq 2\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\|$. Ainsi, pour tout (y_1, y_1) de $\left(\overline{B\left(0, \frac{r}{2}\right)}\right)^2$:

$$\|\varphi_1^{-1}(y_1) - \varphi_1^{-1}(y_2)\| \leq 2\|\varphi(\varphi_1^{-1}(y_1)) - \varphi(\varphi_1^{-1}(y_2))\| = 2\|y_1 - y_2\|$$

ce qui montre que φ_1^{-1} est 2-lipschitzienne, donc continue.

Différentiabilité de φ_1.

Voyons si φ_1^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage ouvert de 0.

Puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, l'application $x \mapsto \det(J_\varphi(x))$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur U. Comme $\det(J_\varphi(0)) = \det(I_n) = 1 \neq 0$, il existe alors $r_1 > 0$ tel que : $\forall x \in \overline{B(0,r_1)},\ \det(J_\varphi(x)) \neq 0$. En remplaçant dans l'étude précédente r par $\min(r, r_1)$, on peut donc supposer : $\forall x \in \overline{B(0,r)},\ d_x\varphi \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ \varphi & \mapsto & \varphi^{-1} \end{array}$ est continue (en effet, en passant aux matrices dans la base canonique, les termes de la matrice de φ^{-1} s'expriment comme quotients, sommes, produits, à partir des termes de la matrice de φ).

Il en résulte, par composition, que l'application $\begin{array}{ccc} \overline{B(0,r)} & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ x & \mapsto & (d_x\varphi)^{-1} \end{array}$ est continue sur le fermé borné $\overline{B(0,r)}$ de l'evn $\mathbb{R}^n$ de dimension finie. Il existe donc alors $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in \overline{B(0,r)},\ |||(d_x\varphi)^{-1}||| \leq M \qquad (\text{où, pour } f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),\ |||f||| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|})$$

Soient $y_0, y \in B\left(0, \frac{r}{2}\right)$, $x_0 = \varphi_1^{-1}(y_0), x = \varphi_1^{-1}(y)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \|\varphi_1^{-1}(y) - \varphi_1^{-1}(y_0) - (d_{x_0}\varphi)^{-1}(y - y_0)\| & = & \left\|x - x_0 - (d_{x_0}\varphi)^{-1}(\varphi(x) - \varphi(x_0))\right\| \\ & = & \left\|(d_{x_0}\varphi)^{-1}\left((d_{x_0}\varphi)(x - x_0) - (\varphi(x) - \varphi(x_0))\right)\right\| \\ & \leq & M\|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (d_{x_0}\varphi)(x - x_0)\| \end{array}$$

Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, on a :

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + (d_{x_0}\varphi)(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(\|x - x_0\|_\infty)$$

D'autre part, φ_1^{-1} est 2-lipschitzienne, donc $\|x - x_0\|_\infty \leq 2\|y - y_0\|_\infty$. Il en résulte :

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) - (d_{x_0}\varphi)(x - x_0) = \underset{y \to y_0}{o}(\|y - y_0\|_\infty)$$

Ainsi, φ_1^{-1} est différentiable en y_0, donc en tout point de $\overline{B\left(0, \frac{r}{2}\right)}$.

Classe $\mathcal{C}^1$.

En notant $V = \varphi_1^{-1}\left(B\left(0, \frac{r}{2}\right)\right)$ et $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} V & \to & \varphi(V) \\ x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$, φ_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert V, bijective, φ_2^{-1} est différentiable sur $\varphi(V) = \overline{B\left(0, \frac{r}{2}\right)}$ et

$$\forall x \in V, (d_{\varphi(x)}\varphi_2^{-1}) \circ (d_x\varphi) = d_x(Id_{\mathbb{R}^n}) = Id_{\mathbb{R}^n}$$

Ceci montre, en passant aux matrices jacobiennes, que les dpp de φ_2^{-1} s'expriment comme quotients (à dénominateur ne s'annulant pas), sommes, produits, des dpp de φ, donc sont continues. Finalement, φ_2^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\varphi(V)$, et φ_2 est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur $\varphi(V)$.