Théorème de Weierstrass

Pabion, *Elements d'analyse complexe*, page 144

Théorème :
Soit $(a_n)_n$ une suite injective de nombres complexes tels que $\lim\limits_{n\infty} a_n = \infty$.
Etant donnée une suite $(b_n)_n$ de nombres complexes non nuls, il existe une fonction F méromorphe sur $\mathbb{C}$ telle que :

1. Les a_n sont exactement les pôles de F
2. Pour tout n, a_n est un pôle simple de résidu b_n.

On peut toujours trouver une suite $(q_n)_n$ d'entiers positifs telle que pour tout r vérifiant $0 \leq r < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| r^{q_n} < +\infty$$

Ainsi, choisissons une suite strictement croissante qui vérifie pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{\ln |b_n|}{q_n} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

On a alors pour tout $n \geq 1$:

$$\limsup_{m\infty} |b_m|^{1/q_m} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

Autrement dit,

$$\limsup_{m\infty} |b_m|^{1/q_m} \leq 1$$

Donc la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^{q_n}$ a un rayon de convergence ≥ 1, ce qui assure bien que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |b_n| r^{q_n} < +\infty$.

Mais, il peut exister des suites convenablement plus économiques (par exemples constantes). Une suite $(a_n)_n$ étant choisie, supposons encore, que les a_n sont tous non nuls. On peut alors considérer la série suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n z^{p_n}}{a_n^{p_n}(z - a_n)} \qquad \text{avec } p_n = q_n - 1$$

Le terme de rang n a un pôle simple $z = a_n$, de résidu :

$$\frac{b_n a_n^{p_n}}{a_n^{p_n}} = b_n$$

Soit $R > 0$. Il n'existe qu'un nombre fini d'indices n tels que $|a_n| \leq R$. Choisissons un nombre r tel que $0 < r < 1$. Il existe un entier N tel que pour tous $n \geq N$,

$$|a_n| \geq \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \frac{R}{|a_n|} \leq r \quad (\text{donc } |a_n| > R)$$

On a pour tout z vérifiant $|z| \leq R$ et tout $n \geq N$:

$$\left| \frac{b_n z^{p_n}}{a_n^{p_n}(z - a_n)} \right| \leq \frac{|b_n|}{1-r} \frac{r^{p_n}}{|a_n|} \leq \frac{|b_n|}{1-r} r^{q_n}$$

Donc la série $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \frac{b_n z^{p_n}}{a_n^{p_n}(z-a_n)}$ converge uniformément pour tout $|z| \leq R$. Ainsi, la série voulue converge uniformément sur tout compact, et définit une fonction méromorphe qui a bien les propriétés requises.

Théorème de Weierstrass:
Soit S un ensemble localement fini dans $\mathbb{C}$ divisé en deux parties disjointes Z et P.
On attache à tout point z de S un entier positif $m(z)$.
Alors il existe une fonction F méromorphe sur $\mathbb{C}$ telle que :

1. Z est l'ensemble des zéros de F.
2. P est l'ensemble des pôles de F.
3. pour tout $z \in S$, $m(z)$ est l'ordre du pôle ou du zéro z.

On sait déjà qu'il existe une fonction méromorphe g, dont S est l'ensemble des pôles, chaque pôle $z \in S$ étant simple et de résidu $m(z)$ si $z \in Z$, $-m(z)$ si $z \in P$.

Soit Δ le domaine $\mathbb{C} \backslash S$. Fixons un point $z_0 \in \Delta$. Pour tout $z \in \Delta$, il existe un chemin γ qui relie z_0 à z en restant dans Δ.

L'intégrale $\int_\gamma g(z)dz$ dépend a priori de γ. Mais si δ est un autre chemin qui relie z_0 à z dans Δ, la formule des résidus appliquée au circuit $\lambda = \gamma - \delta$ montre que la différence :

$$\int_\gamma g(z)dz - \int_\delta g(z)dz \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

Donc le nombre $\exp\left(\int_\gamma g(z)dz\right)$ ne dépend que de z, et non du choix de γ. On définit ainsi une fonction F sur Δ.

Montrons que F est holomorphe.

Soit $\omega_0 \in \Delta$. Il existe $r > 0$ tel que le disque ouvert $D = D(\omega_0, r[$ soit inclus dans Δ. La fonction g a une primitive G sur D et on peut supposer que $G(\omega_0) = 0$. On a alors pour tout $\omega \in \Delta$:

$$F(\omega) = F(\omega_0)\exp\left(G(\omega)\right)$$

Donc F est holomorphe dans D, et a pour dérivée :

$$F'(\omega) = F(\omega_0)\exp\left(G(\omega)\right)G'(\omega) = F(\omega_0)\exp\left(G(\omega)\right)g(\omega) = F(\omega)g(\omega)$$

Ainsi, on a pour tout $z \in \Delta$:

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = g(z)$$

Tout point $z \in Z$ (resp. P) est un pôle simple de $\frac{F'}{F}$, de résidu $m(z)$ (resp. $-m(z)$).

Tout $z \in Z$ est donc une fausse singularité, qui donne donc un zéro d'ordre $m(z)$.

Tout $z \in P$ est un pôle d'ordre $m(z)$.

Application :
Toute fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ est le quotient de deux fonctions entières.

En effet, soit F une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$.

i F n'a pas de pôle, elle est entière et on peut écrire $F = F/1$.

Sinon, il existe une fonction entière g, dont les zéros sont les pôles de F, et qui a en tout pôle de F un zéros de même ordre. Alors $f = gF$ n'a que de fausses singularités, donc se prolonge en une fonction entière. On a alors $F = f/g$.