Loi faible des grands nombres / Théorème de Weierstrass

Lesigne, *Pile ou face*, page 13

Loi Faible des Grands Nombres: Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0$$

et cette convergence est uniforme en p.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que $\mathbb{E}(S_n) = np$ et $\mathbb{V}(S_n) = np(1-p)$. On utilise alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev qui donne alors :

$$\mathbb{P}\left(|S_n - np| > n\varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{(n\varepsilon)^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

ce qui prouve le théorème

Théorème de Weierstrass : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On définit le polynôme de Bernstein associé à f d'ordre n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

Alors, on a

$$\lim_{n\to\infty} \|f - B_n(f)\| = 0$$

En particulier, toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue sur $[0,1]$ compact, elle est donc uniformément continue sur $[0,1]$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1],\ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Considérons également la variable aléatoire $f(\frac{S_n}{n})$ où $S_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$. D'après le principe de transfert, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}\left(S_n = k\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) p^k (1-p)^{n-k} = B_n(f)(p)$$

On peut appliquer la loi faible des grands nombres qui nous dit qu'il existe un entier n_0, indépendant du paramètre p, tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \eta\right) < \varepsilon$$

On a

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(p) - f(p)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right) \mathbb{P}\left(S_n = k\right)\right| \\
&\leq \sum_{|\frac{k}{n} - p| \leq \eta} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right| \mathbb{P}(S_n = k) + \sum_{|\frac{k}{n} - p| > \eta} \left(\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(p)|\right) \mathbb{P}(S_n = k) \\
&\leq \sum_{|\frac{k}{n} - p| \leq \eta} \varepsilon \mathbb{P}(S_n = k) + \sum_{|\frac{k}{n} - p| > \eta} 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(S_n = k) \\
&= \varepsilon \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq \eta\right) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \eta\right)
\end{aligned}$$

Pour tout $n \geq n_0$, on a donc

$$|B_n(f)(p) - f(p)| \leq \varepsilon + 2\varepsilon \|f\|_\infty$$

ce qui prouve donc le résultat.