Théorème central limite

Ouvrard, *Probabilités 2*, page 325

Théorème :
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre deux. La suite de terme général Y_n, défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \mathbb{E}[X_j]),$$

converge en loi vers la loi gaussienne $\mathfrak{N}_{\mathbb{R}^d}(0, C_{X_1})$, où C_{X_1} est la matrice de covariance des X_j.

Les variables aléatoires X_j étant indépendantes et de même loi, la fonction caractéristique de Y_n est donnée par, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,

$$\varphi_{Y_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{(X_j - \mathbb{E}X_j)}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{\langle X_1 - \mathbb{E}X_1, t\rangle}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

Cherchons alors un développements asymptotique de $\varphi_{Y_n}(t)$.

Lemme : *Si la variable aléatoire réelle X admet un moment d'ordre deux, sa fonction caractéristique φ_X admet un développement limité d'ordre deux en 0 donné par, pour tout réel t,*

$$\varphi_X(t) = 1 + it\mathbb{E}X - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}X^2 + o(t^2)$$

En effet, la formule de Taylor avec reste intégral écrite à l'ordre2 donne, pour tout réel x,

$$\exp(ix) = 1 + ix - x^2 \int_0^1 (1-u)\exp(iux)du$$

soit, puisque $\displaystyle\int_0^1 (1-u)du = \frac{1}{2}$, $\quad \exp(ix) - \left(1 + ix - \dfrac{x^2}{2}\right) = -x^2 \displaystyle\int_0^1 (1-u)\left(\exp(iux) - 1\right)du.$

Il en résulte que $\left|\exp(ix) - \left(1 + ix - \dfrac{x^2}{2}\right)\right| \leq x^2.$

Le lemme précédent appliqué à la variable aléatoire réelle centrée $\langle X_1 - \mathbb{E}X_1, t\rangle$ donne le développement asymptotique

$$\varphi_{Y_n}(t) = \left(1 - \frac{1}{2n}\mathbb{E}\left(\langle X_1 - \mathbb{E}X_1, t\rangle^2\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

Or $\forall z \in \mathbb{C}$, la suite de terme général $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ est convergente et

$$\lim_{n\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

Ainsi la suite de terme général $\varphi_{Y_n}(t)$ converge et

$$\lim_{n\in fty} \varphi_{Y_n}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\langle X_1 - \mathbb{E}X_1, t\rangle^2\right)\right)$$

soit, puisque $\mathbb{E}\left(\langle X_1 - \mathbb{E}X_1, t\rangle^2\right) = \langle C_{X_1}t, t\rangle$,

$$\lim_{n\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle C_{X_1}t, t\rangle\right)$$

Un théorème de Lévy dit que si une suite $(\varphi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions caractéristiques converge simplement vers une fonction φ continue en 0, alors φ est la transformée de Fourier d'une probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$, et la suite des variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers μ.

Ici, le théorème de Lévy assure donc que

$$Y_n \xrightarrow{loi} \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d}(0, C_{X_1})$$