# Théorème d'Ascoli

Schwartz, *Analyse I, Théorie des ensembles et Topologie*, page 346

**Théorème :** Soit $(E, d)$ un espace métrique compact, $(F, \delta)$ un espace métrique complet.
Une partie $A$ de $\mathcal{C}(E, F)$ est relativement compacte si et seulement si :

1. $A$ est équicontinue, c'est-à-dire :
$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \;/\; \forall f \in A, \forall y \in E, (d(x, y) \leq \eta) \Rightarrow (\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$
2. Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact.

Dans un evn de dim. finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées. Dans un espace vectoriel topologique séparé, les parties relativement compactes restent bornées, mais la réciproque est fausse.

Le théorème d'Ascoli traite du cas de l'espace des fonctions continues.

*Preuve :*

- Supposons que $A$ soit relativement compacte. Comme $\mathcal{C}(E, F)$ est un espace métrique complet, $A$ est précompact. Autrement dit, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut choisir un nombre fini d'éléments $f_1, \ldots, f_p$ dans $A$ tel que
$$A \subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}(f_i, \varepsilon)$$
Cela signifie que toute fonction $f$ dans $A$ se trouve à une distance d'au plus $\varepsilon$ de l'un des $f_i$.

  Pour $x$ fixé dans $E$, toute image $f(x)$ se trouve donc à une distance au plus $\varepsilon$ de l'un des $f_i(x)$. Ainsi :
$$A(x) \subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}(f_i(x), \varepsilon)$$
Une telle inclusion étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A(x)$ est précompact.

  Comme $F$ est complet, $A(x)$ est relativement compact.

  De plus, les fonctions $f_i$ sont continues sur le compact $E$ et donc, par le théorème de Heine, sont uniformément continues. En particulier,
$$\exists \eta_i > 0 \;/\; \forall x, y \in E,\ (d(x, y) < \eta_i) \ \Rightarrow (\delta(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon)$$
Posons $\eta = \min_{i=1\ldots p} \eta_i > 0$. Soient $x, y$ deux points quelconques dans $E$ vérifiant $d(x, y) < \eta$. Pour une fonction $f$ dans $A$, il existe un indice $i$ dans lequel $\max_{z \in E} \delta(f(z), f_i(z)) < \varepsilon$. Par choix de $\eta$, l'implication ci-dessus donne :
$$\delta(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$$
L'inégalité triangulaire donne :
$$\delta(f(x), f(y)) \leq \delta(f(x), f_i(x)) + \delta(f_i(x), f_i(y)) + \delta(f_i(y), f(y)) < 3\varepsilon$$
Cette inégalité vérifiée par tous $x$ et $y$ tels que $d(x, y) < \eta$, reste valable pour toute fonction $f \in A$. D'où l'équicontinuité de $A$.

- Réciproquement, on souhaite démontrer qu'une partie équicontinue $A$ de $\mathcal{C}(E, F)$ telle que $A(x)$ soit relativement compacte pour tout $x$, est relativement compacte.

  Comme $\mathcal{C}(E, F)$ est un espace métrique, il revient au même d'établir que l'adhérence de $A$ est séquentiellement compacte ; ou encore que toute suite d'éléments de l'adhérence de $A$ admet au moins une valeur d'adhérence.

  Soit donc $(f_p)_p$ une suite de $\overline{A}$. Comme $E$ est un espace métrique compact, il est séparable et on peut donc se donner une partie dénombrable $D = \{a_k, k \in \mathbb{N}\}$ dense dans $E$.

Introduisons

$$X = \prod_{k\in\mathbb{N}} \overline{A(a_k)}$$

Par hypothèse, $A(x)$ est relativement compact pour tout $x \in E$, autrement dit son adhérence est une partie compacte de $F$. L'espace $X$ est défini comme le produit dénombrable d'espaces métriques compacts : c'est donc lui-même un espace métrique compact.

A chaque $f \in \overline{A}$, on fait correspondre l'élément $(f(a_k))_k$ de $X$. Donc, à chaque $(f_p)_p$, on fait correspondre $h_p = (f_p(a_k))_k \in X$. De la suite $(h_p)_p \in X^{\mathbb{N}}$, on peut extraire, par compacité de $E$, une sous-suite convergente $(h_{\varphi(p)})_p$ qui converge vers $h = (h^{(k)})_k$. La continuité des projections $p_k$ sur chacun des facteurs de $X$ donne :

$$\forall k,\ p_k(h_{\varphi(p)}) = f_{\varphi(p)}(a_k) \longrightarrow h^{(k)} \in F$$

Autrement dit, la sous-suite $(f_{\varphi(p)})_p$ est simplement convergente en tout point de $E$.

De plus, $(f_{\varphi(p)})_p \in \overline{A}^{\mathbb{N}}$ donc est équicontinue par le premier point. Or on sait que si une suite de fonctions d'un espace métrique compact $E$ dans un espace métrique complet $F$ est simplement convergente sur une partie dense de $E$ et est équicontinue, alors cette suite est uniformément convergente sur $E$.

On en déduit que la sous-suite $(f_{\varphi(p)})_p$ est uniformément convergente sur $E$ donc $(f_{\varphi(p)})_p$ converge dans $\mathcal{C}(E,F)$ muni de la topologie de la convergence uniforme et donc $A$ est relativement compacte.