Théorème de Dirichlet

Monier, *Analyse MP*, page 451

Théorème :
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Alors, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la régularisée $\widetilde{f}$ de f.
Ainsi, sous ces hypothèses, pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$\boxed{c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}\right) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}}$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}}$$

Lemme de Lebesgue : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. Alors :

$$\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

1. La propriété est immédiate lorsque $f = 1$ car :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} dt \right| = \left| \frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda} \right| \leq \frac{2}{|\lambda|} \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. Par utilisation de la relation de Chasles, la propriété est vraie lorsque f est en escalier sur $[a, b]$.

3. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une application en escalier $e : [a, b] \to \mathbb{C}$ telle que $\|f - e\|_\infty < \varepsilon$. On a alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad \left| \int_a^b (f(t) - e(t)) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - e(t)| dt \leq (b - a)\varepsilon$$

D'autre part, d'après le point précédent, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall \lambda \geq \lambda_0$, $\left| \int_a^b e(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \varepsilon$.

On obtient ainsi, pour tout $\lambda \geq \lambda_0$:

$$\left| \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \left| \int_a^b \big(f(t) - e(t)\big) e^{i\lambda t} dt \right| + \left| \int_a^b e(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq (1 + b - a)\varepsilon$$

ce qui montre bien que

$$\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Preuve du théorème :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t} &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{T} \int_{[T]} f(u) e^{-ik\omega u} e^{ik\omega x} du \\
&= \frac{1}{T} \int_{[T]} f(u) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega(x-u)} du \\
(v = x - u) \quad &= -\frac{1}{T} \int_{[T]} f(x - v) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega(v)} dv \\
(s = -v) \quad &= \frac{1}{T} \int_{[T]} f(x + s) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega(s)} ds
\end{aligned}$$

D'où

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{T} \int_{[T]} \frac{f(x-v)+f(x+v)}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega v} dv$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, définie par $D_n(v) = \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ik\omega v}$, est appelée le *noyau de Dirichlet*. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathbb{R} \backslash T\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
D_n(v) = -1 + \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ik\omega v} + e^{-ik\omega v}\right) &= -1 + \frac{e^{i(n+1)\omega v} - 1}{e^{i\omega v} - 1} + \frac{e^{-i(n+1)\omega v} - 1}{e^{-i\omega v} - 1} \\
&= -1 + e^{\frac{in\omega v}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\omega v\right)}{\sin\left(\frac{\omega v}{2}\right)} + e^{-\frac{in\omega v}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\omega v\right)}{\sin\left(\frac{\omega v}{2}\right)} \\
&= -1 + 2\frac{\cos\left(\frac{n\omega v}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\omega v}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega v}{2}\right)} \\
&= -1 + \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\omega v\right) + \sin\left(\frac{\omega v}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega v}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega v\right)}{\sin\left(\frac{\omega v}{2}\right)}
\end{aligned}$$

3. On a , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{T}\int_{[T]} D_n(v)dv = \frac{1}{T}\sum_{k=-n}^{n} \int_{[T]} e^{ik\omega v}dv = \sum_{k=-n}^{n} < e_0 | e_k >= 1$$

On obtient ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(f)(x) - \widetilde{f}(x) = \frac{1}{T}\int_{[T]} \left(\frac{f(x-v) + f(x+v)}{2} - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}\right) D_n(v)dv$$

Considérons $g_x : v \mapsto \dfrac{(f(x+v) - f(x^+)) + (f(x-v) - f(x^-))}{2\sin\frac{\omega v}{2}}$.

- g_x est continue par morceaux sur $\left[-\dfrac{T}{2}, 0\right[$ et sur $\left]0, \dfrac{T}{2}\right]$, et il n'y a qu'un nombre fini de discontinuités.
- Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$,

$$\frac{f(x+v) - f(x^+)}{v} \underset{v\to 0^+}{\longrightarrow} f'(x^+) \qquad \text{et} \qquad \frac{f(x-v) - f(x^-)}{v} \underset{v\to 0^+}{\longrightarrow} -f'(x^-)$$

  donc

$$g_x(v) \underset{v\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{f'(x^+) - f'(x^-)}{\omega}$$

  De même,

$$g_x(v) \underset{v\to 0^-}{\longrightarrow} \frac{f'(x^+) - f'(x^-)}{\omega}$$

  Ainsi, g_x est continue par morceaux sur $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$.

Alors, d'après le lemme de Lebesgue :

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{T}\int_{[T]} g_x(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega v\right) dv \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et finalement, $S_n(f)(x) \longrightarrow f(x)$.