Théorème de Mohr-Mascheroni

Carrega, *Théorie des corps*, page 108

> **Théorème :**
> Tout point constructible à la règle et au compas est en fait constructible avec le compas seulement.

Preuve :

- **Construction d'un repère orthonormé** (O, I, J).

  On se donne deux points de base O et I. Montrons qu'on peut construire uniquement avec le compas un point J pour que (O, I, J) soit un repère orthonormé.

  1. Tracer le cercle Γ de centre O passant par I.
  2. On construit sur Γ les premiers points d'un hexagone régulier inscrit dans Γ : A_1, A_2, A_3 (A_3 est alors le point symétrique de I par rapport à O.)
  3. Le triangle IA_1A_3 est rectangle en A_1 et $\widehat{A_3\,I\,A_1} = \dfrac{\pi}{3}$. On en déduit alors que
  $$A_3A1 = \sqrt{3}OI$$
  De même, on obtient que $IA_2 = \sqrt{3}OI$.
  4. Les cercles de rayon $A_1A_3 = IA_2$ centrés en I et A_3 se coupent en B. Le triangle rectangle IOB nous donne :
  $$OB^2 = IB^2 - OI^2 = IA_2^2 - OI^2 = 3OI^2 - OI^2 = 2OI^2$$
  Donc $OB = \sqrt{2}OI$.
  5. Le point J cherché s'obtient alors à l'aide du cercle de centre I et de rayon OB.

- On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des coordonnées dans (O, I, J) des points constructibles à la règle et au compas, et $\mathcal{C}'$ l'ensemble des coordonnées dans (O, I, J) des points constructibles au compas. Enonçons 5 règles sur les points de $\mathcal{C}'$.

- $\boxed{\textbf{R1}}$: *Si A et B sont des points constructibles au compas, alors le symétrique de A par rapport à B est constructible au compas.*

  Il suffit de reprendre les points 1) et 2) ci-dessus.

- $\boxed{\textbf{R2}}$: *Si A, B et C sont des points constructibles au compas ($B \neq C$), alors le symétrique D de A par rapport à la droite (BC) est constructible au compas.*

  Il suffit de construire les cercles de centres B et C passant par A, ils se coupent en D.

- $\boxed{\textbf{R3}}$: *Si A, et B sont des points constructibles au compas, alors le milieu du segment $[AB]$ est constructible au compas.*

  1. Soit C le symétrique de A par rapport à B (ok d'après **R1**).
  2. Les cercles de centre C passant par A, et de centre A passant par B se coupent en D et E.
  3. Les cercles de centres D et E passant par A se coupent alors en I, milieu du segment $[AB]$.

  En effet, si A' est le symétrique de A par rapport à C et H la projection orthogonale de D (et E) sur la droite (AB).

  Dans le triangle rectangle ADA', on a $AD^2 = AN.AA'$ (regarder le cos de l'angle en A), qui s'écrit aussi : $AB^2 = AN.(4AB)$. On obtient donc $AH = \dfrac{AB}{4}$ et ainsi $AI = \dfrac{AB}{2}$

- $\boxed{\textbf{R4}}$: *Si M est un point du plan, M est constructible au compas si et seulement si ses projections sur les axes (Ox) et (Oy) du repère (O, I, J) sont constructibles au compas.*

  $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons M constructible au compas. Montrons que sa projection orthogonale M_1 sur (Ox) est constructible au compas. Si M est sur (Ox), alors $M = M_1$ et le résultat est établi. Sinon, considérons M' le symétrique de M par rapport à (Ox), (ok d'après **R2**). Alors M_1 est le milieu du segment $[MM']$ (ok d'après **R3**).

  Même démonstration pour M_2 projection orthogonale de M sur (Oy).

  $\boxed{\Leftarrow}$ Si les projections M_1 et M_2 de M sur les axes sont constructibles au compas, il en est de même pour M car c'est un des points d'intersections des cercles de centre M_1 de rayon OM_2 et de centre M_2 de rayon OM_1.

- $\boxed{\textbf{R5}}$: *$\mathcal{C}'$ est l'ensemble des abscisses des points de l'axe (Ox) constructibles au compas, ainsi que l'ensemble des ordonnées des points de l'axe (Oy) constructibles au compas.*

  En effet, l'abscisse d'un point de l'axe (Ox) constructible au compas est évidemment dans $\mathcal{C}'$, réciproquement si $t \in \mathcal{C}'$, alors t est une des coordonnées d'un point M constructible au compas.

  Si t est l'abscisse de M, t est aussi l'abscisse de la projection M_1 de M sur Ox et ce point est constructible au compas d'après **R4**.

  Si t est l'ordonnée de M, considérons le point K de coordonnées $(1, 1)$ dans le repère (O, I, J). Ce point est constructible au compas d'après **R4**. Le symétrique N de M par rapport à la droite (OK) est constructible d'après **R2** et t est l'abscisse de N. On est donc ramené au cas précédent.

- Il nous reste donc à montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$. Car si M est un point du plan constructible à la règle et au compas, ses coordonnées x et y dans (O, I, J) sont dans $\mathcal{C}$, donc dans $\mathcal{C}'$. D'après **R5**, les projections M_1 et M_2 de M sur les axes sont constructibles au compas et d'après **R**4, M est constructible au compas.

  Montrons donc que $\mathcal{C}'$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée. Comme $\mathcal{C}$ est le plus petit sous-corps vérifiant ceci, on aura $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$

- **$\mathcal{C}'$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.**

  1. **Si $u \in \mathcal{C}'$, alors $-u \in \mathcal{C}'$.**
     En effet, si A est le point de l'axe (Ox) d'abscisse u, A est constructible d'après **R5**, le point de l'axe (Ox) d'abscisse $-u$ est le symétrique de A par rapport à O : ok d'après **R1**.
  2. **Si $u, v \in \mathcal{C}'$, alors $u + v \in \mathcal{C}'$.**
     u et v sont les abscisses des points A et B de l'axe (Ox) constructibles, le point M d'absciise $u + v$ est le symétrique de O par rapport au milieu du segment $[AB]$, ok d'après **R1** et **R3**.
  3. **Si $u, v \in \mathcal{C}', u > 0, v > 0,\ u \neq v$, alors $\sqrt{uv} \in \mathcal{C}'$**
     Soient A et B les points de l'axe (Ox) d'abscisses u et $-v$, soit M le milieu du segment AB. Le cercle de centre M passant par A et B coupe l'axe (Oy) en C tel que $OC = \sqrt{uv}$. Comme $u \neq v$, on a $M \neq O$. Si M' est le symétrique de M par rapport à O, C est un point d'intersection des cercles de centres M et M' et de rayon MA. Come M et M' sont constructibles, C l'est donc.
  4. **Si $u, v, w \in \mathcal{C}', w \neq 0$, alors $\dfrac{uv}{w} \in \mathcal{C}'$**

     On peut supposer u et v non nuls et positifs. On a $\dfrac{uv}{w} = \dfrac{(\sqrt{uv})^2}{w}$. On sait que $\sqrt{tu} \in \mathcal{C}'$. On est donc ramené à démontrer que si t et w sont dans $\mathcal{C}'$ avec $t > 0$, $w > 0$, alors $\dfrac{t^2}{w} \in \mathcal{C}'$.
     Soit A le point de l'axe (Ox) d'abscisse w et B le point de l'axe Oy d'ordonnée t.
     Les cercles de centre A passant par O et de centre O passant par B se coupent en M et N. Soit O' le symétrique de O par rapport à A. Soit C la projection orthogonale de M sur (Ox). Dans le triangle rectangle OMO', on a
     $$OM^2 = OC.OO'$$
     autrement dit $t^2 = OC(2w)$, d'où $OC = \dfrac{t^2}{2w}$. Le symétrique D de O par rapport à C est constructible et il a pour abscisse $\dfrac{t^2}{w}$.