Théorème de prolongement

Gourdon, *Analyse*, page 24

Théorème :
Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques, et soit A une partie de E dense dans E.
On suppose de plus que (F,δ) est complet. Soit $f:(A,d)\to(F,\delta)$ une application uniformément continue. Montrer l'existence d'une unique fonction $g:E\to F$ uniformément continue, telle que $g_{|A}=f$.

Lemme : Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques, et soit A une partie de E dense dans E. Si $f:(A,d)\to(F,\delta)$ est continue et si

$$\forall x\in E\backslash A,\quad \lim_{\substack{y\to x\\ y\in A}} f(y)\quad \text{existe}$$

alors il existe une unique fonction $f:E\to F$, continue, telle que $g_{|A}=f$.

Définissons $g:E\to F$ de la manière suivante :

$$\forall x\in A,\ g(x)=f(x)\quad \text{et}\quad \forall x\in E\backslash A,\ g(x)=\lim_{\substack{y\to x\\ y\in A}} f(y)$$

Montrons que g est continue sur E. Soit $x\in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de points de E tendant vers x. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{\substack{y\to x_n\\ y\in A}} f(y)=g(x_n)$. On en déduit facilement que

$$\forall n\geq 1,\exists y_n\in A\ /\ d(x_n,y_n)\leq\frac{1}{n}\quad \text{et}\quad \delta(g(x_n),f(y_n))<\frac{1}{n}$$

La relation :

$$d(x,y_n)\leq d(x,x_n)+d(x_n,y_n)\leq\frac{1}{n}+d(x,x_n)$$

montre alors que $\lim\limits_{n\infty} y_n=x$, et donc $\lim\limits_{n\infty} f(y_n)=g(x)$. Maintenant, les inégalités

$$\delta(g(x_n),g(x))\leq\ \delta(g(x_n),f(y_n))+\delta(f(y_n),g(x))\leq\frac{1}{n}+\delta(f(y_n),g(x))$$

montrent que $\lim\limits_{n\infty} g(x_n)=g(x)$. Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) de E tendant vers x, on en conclut que g est continue en x, et ceci pour tout $x\in E$.

Unicité : Soient g et $h:E\to F$ deux applications continues telles que $g_{|A}=h_{|A}$.

- Par hypothèse, $g(x)=h(x)$ pour tout $x\in A$.
- Soit $x\in E\backslash A$. Comme g est continue et que A est dense dans E, il existe une suite (x_n) de points de A tendant vers x. On a

  $$g(x)=\lim_{n\infty} g(x_n)=\lim_{n\infty} f(x_n),\quad \text{de même},\ h(x)=\lim_{n\infty} f(x_n)$$

  ce qui suffit pour conclure que $g(x)=h(x)$.

Preuve du théorème :
L'idée est de se ramener au lemme précédent puis de prouver que la fonction g obtenue est bien uniformément continue.

Soit $x_0\in E\backslash A$. Montrons que $\lim\limits_{\substack{y\to x_0\\ y\in A}} f(y)$ existe. Soit $\varepsilon>0$. Comme f est uniformément continue sur A,

$$\exists\alpha>0,\ \forall(x,y)\in A^2,\quad f(x,y)<\alpha\implies\delta(f(x),f(y))<\varepsilon$$

En particulier, si $x,y\in A$ vérifient $d(x,x_0)<\dfrac{\alpha}{2}$ et $d(y,x_0)<\dfrac{\alpha}{2}$, on a $d(x,y)<\alpha$ donc $\delta(f(x),f(y))<\varepsilon$. Comme (F,δ) est complet, d'après le critère de Cauchy pour les fonctions, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{y\to x_0\\ y\in A}} f(y)$ existe.

D'après le résultat du lemme, la fonction g définie sur E par :

$$\forall x \in A, g(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in E \backslash A,\ g(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y)$$

est continue sur E. Nous allons prouver qu'elle est uniformément continue sur E. Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, f est uniformément continue sur A, donc

$$\exists \alpha > 0,\ \forall (x, y) \in A^2,\ d(x, y) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Donnons nous $(x, y) \in E^2$ avec $d(x, y) < \alpha$. Comme A est dense dans E, il existe deux suites (x_n) et (y_n) de points de A tendant respectivement vers x et y. La distance étant conitnue, on a $\lim_{n\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y) < \alpha$, ce qui montre l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, y_n) < \alpha$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $\delta(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\delta(g(x), g(y)) \leq \varepsilon$. Ceci est vrai pour tout couple $(x, y) \in E^2$ tel que $d(x, y) < \alpha$, la fonction g est donc uniformément continue sur E.

L'unicité découle de l'unicité dans le lemme, car une fonction uniformément continue est en particulier continue.