Théorie de Polya

Neumann-Stay-Thompson, *Groups and Geometry*, page 100

Problème : De combien de manières différentes N peut-on colorier un objet géométrique en fonction du nombre de couleurs distinctes à notre disposition ?

Soit X un ensemble fini, de cardinal n, représentant les différentes parties de l'objet qui sont à colorer. En numérotant ses éléments, on peut supposer que $X = \{1, \dots, n\}$.
Soit C un ensemble de p couleurs différentes. On considère que $C = \{1, \dots, p\}$.
Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des colorations de X à l'aide des couleurs de C : $\mathcal{C} = \{\varphi : X \to C\}$.
Soit G le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$, représentant le groupe des permutations laissant globalement invariant l'objet géométrique considéré.

Lemme 1: Le groupe G agit sur X par l'action $g.x = g(x)$. Ceci induit une action de G sur $\mathcal{C}$ par $g.\varphi = \varphi \circ g$.
Le nombre N de manières différentes de colorer X à l'aide des couleurs de C correspond alors au nombre d'orbites dans $\mathcal{C}$ sous l'action de G.

Preuve : Soient φ, ψ deux colorations de X.

$$\varphi = \psi \iff \exists g \in G \;/\; \forall x \in X, \varphi(g.x) = \psi(x)$$

Les deux colorations sont donc identifiables si et seulement si elles sont dans la même orbite. On a donc bien le résultat.

Lemme 2 : Pour tout $g \in G$, on pose

$$\mathrm{Fix}(g) = \{\varphi \in \mathcal{C} \;/\; g.\varphi = \varphi\}$$

Alors

$$\boxed{N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|}$$

Preuve : Supposons dans un premier temps que G agisse transitivement sur $\mathcal{C}$ ($N = 1$). Posons

$$S = \{(\varphi, g) \in \mathcal{C} \times G \;/\; g.\varphi = \varphi\}$$

D'une part, on a $|S| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$. D'autre part, on a $|S| = \sum_{\varphi \in \mathcal{C}} |G_\varphi|$ où $G_\varphi = \{g \in G \;/\; g.\varphi = \varphi\}$ est le stabilisateur de φ.

D'après le Théorème de Lagrange, comme $\mathcal{C}$ est un espace G-transitif, on a $|G_\varphi| = \dfrac{|G|}{|\mathcal{C}|}$

D'où $|S| = \sum_{\varphi \in \mathcal{C}} |G_\varphi| = |\mathcal{C}| \dfrac{|G|}{|\mathcal{C}|} = |G|$. Ainsi $1 = N = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$.

Supposons à présent que les G-orbites de $\mathcal{C}$ soient $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_N$, $n \geq 1$ quelconque. Alors

$$\mathrm{Fix}_{\mathcal{C}}(g) = \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{Fix}_{\mathcal{C}_i}(g) \quad \text{et} \quad |\mathrm{Fix}_{\mathcal{C}}(g)| = \sum_{i=1}^{N} |\mathrm{Fix}_{\mathcal{C}_i}(g)|$$

D'où $\dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_{\mathcal{C}}(g)| = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{N} |\mathrm{Fix}_{\mathcal{C}_i}(g)| = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_{\mathcal{C}_i}(g)| = \sum_{i=1}^{N} 1 = N$. CQFD.

Il nous reste donc à présent à expliciter $\left|\mathrm{Fix}_{(}g)\right|$.
Pour tout $g \in G$, on note $\lambda(g)$ le nombre de cycles qui composent l'unique décomposition de g en produit de cycles disjoints auquel on ajoute le nombre de points fixes de g.

Lemme 3 : Soit $\varphi \in \mathcal{C}$. On a $\varphi \in \mathrm{Fix}(g)$ si et seulement si φ est constante sur les supports des cycles qui décomposent g.

Preuve : En effet, $\varphi \in \mathrm{Fix}(g)$ si et seulement si pour tout $x \in X$, on a $\varphi(g(x)) = \varphi(x)$.

Soit alors $g = g_1 \circ \ldots \circ g_k$ l'unique décomposition de g en cycles disjoints. Si $x \in X$ n'est pas dans le support d'un des cycles qui décomposent g, alors $g(x) = x$ et x est un point fixe de g. Dans ce cas, on a trivialement, $\varphi(g(x)) = \varphi(x)$.

Sinon, il existe un unique cycle g_i tel que $x \in Supp(g_i) = S_i$. On suppose que le cycle g_i est de longueur $\alpha_i \geq 2$. On a alors

$$S_i = \{x, g_i(x), \ldots, g_i^{\alpha_i - 1}(x)\} = \{x, g(x), \ldots, g^{\alpha_i - 1}(x)\}$$

On a donc $\varphi(g(x)) = \varphi(x)$, $\varphi(g^2(x)) = \varphi(g(x)) = \varphi(x)$, $\ldots$, $\varphi(g^{\alpha_i-1}(x)) = \ldots = \varphi(g(x)) = \varphi(x)$.

Par conséquent, φ est bien constante sur S_i. La réciproque est claire. CQFD.

Réponse :

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} p^{\lambda(g)}$$

Application : coloriages d'un hexagone.

Déterminons le nombre de façons de colorer les six sommets d'un hexagone à l'aide de p couleurs différentes. L'hexagone est dessiné sur une feuille de papier, ainsi seul le groupe G des rotations de l'hexagone intervient (on ne peut pas a priori retourner la feuille).

Le groupe G possède 6 éléments, qui sont :

- (1)(2)(3)(4)(5)(6) : l'identité.
- (123456) : la rotation d'angle $\pi/3$.
- (135)(246) : la rotation d'angle $2\pi/3$.
- (14)(25)(36) : la rotation d'angle π.
- (153)(264) : la rotation d'angle $-2\pi/3$.
- (165432) : la rotation d'angle $-\pi/3$.

D'après le résultat précédent, on a alors

$$N = \frac{p^6 + 2p + 2p^2 + p^3}{6}$$

Quelques exemples :

- pour 2 couleurs, $N = 14$.
- pour 3 couleurs, $N = 130$.
- pour 4 couleurs, $N = 700$.