Loi Forte des Grands Nombres

Théorème 1
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de L^1, centrées, indépendantes et identiquement distribuées. Alors, en posant $S_n = X_1 + \ldots + X_n$,

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \ p.s.$$

Preuve :
On sait que pour n'importe quelle suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires, on a

$$Y_n \longrightarrow 0 \ p.s. \quad \Longleftrightarrow \quad W_n = \sup_{k\geq n} |X_k| \xrightarrow{P} 0$$

Ainsi, la propriété $\dfrac{S_n}{n} \to 0 \ p.s.$ équivaut à l'énoncé :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\sup_{k\geq n}\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Lemme 2
Pour tout $n \geq 1$, tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\varepsilon P\left(\sup_{k\geq n}\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \left\|\frac{S_n}{n}\right\|_1$$

Autrement dit, si $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{L^1} 0$, alors $\dfrac{S_n}{n} \to 0 \ p.s.$

Démontrons de manière équivalente que pour tout couple d'entiers (m, n) tel que $1 \leq m \leq n$ et tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\varepsilon P\left(\sup_{m\leq k\leq n}\left|\frac{S_k}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \left\|\frac{S_m}{m}\right\|_1$$

Introduisons l'ensemble $T_n = \sup\left\{1 \leq k \leq n\ ,\ \left|\dfrac{S_k}{k}\right| > \varepsilon\right\}$ (avec la convention que $\sup\emptyset = -\infty$) et posons $A = \left\{\sup\limits_{m\leq k\leq n}\left|\dfrac{S_k}{k}\right| > \varepsilon\right\}$. Alors

$$A = \{T_n \geq m\} = \sum_{m\leq k\leq n}\{T_n = k\} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon P(A) = \varepsilon \sum_{m\leq k\leq n} P(T_n = k)$$

Or, par définition de T_n, on a, pour tout k tel que $m \leq k \leq n$, les relations

$$\varepsilon P(T_n = k) \leq \int_{\{T_n=k\}}\left|\frac{S_k}{k}\right| dP = \underbrace{\int_{\{T_n=k\ ,\ S_k/k>0\}}\frac{S_k}{k}dP}_{B} + \underbrace{\int_{\{T_n=k\ ,\ S_k/k<0\}} -\frac{S_k}{k}dP}_{C}$$

Calculons séparément B et C. D'abord

$$B = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \int_{\{T_n = k \ , \ S_k/k > 0\}} X_j dP$$

Or, puisque les X_n sont indépendantes et identiquement distribuées, toutes les intégrales du second membre sont égales. Ce second membre est donc aussi égal à la moyenne arithmétique de k nombres tous égaux à l'intégrale

$$\int_{\{T_n = k \ , \ S_k/k > 0\}} X_1 dP$$

C'est donc aussi la moyenne arithmétique de m ($m \leq k$) nombres tous égaux à cette quantité. Par conséquent,

$$B = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \int_{\{T_n = k \ , \ S_k/k > 0\}} X_1 dP = \int_{\{T_n = k \ , \ S_k/k > 0\}} \frac{S_m}{m} dP$$

On opère de manière analogue pour C et l'on obtient :

$$C = \int_{\{T_n = k \ , \ S_k/k < 0\}} -\frac{S_m}{m} dP$$

Finalement,

$$\varepsilon P(T_n = k) \leq B + C = \int_{\{T_n = k\}} \left| \frac{S_m}{m} \right| dP$$

d'où, en sommant sur k,

$$\varepsilon P(A) \leq \sum_{m \leq k \leq n} \int_{\{T_n = k\}} \left| \frac{S_m}{m} \right| dP \leq \mathbb{E}\left(\left| \frac{S_m}{m} \right| \right) = \left\| \frac{S_m}{m} \right\|_1$$

Enfin, en combinant le lemme à l'équivalence précédente, on peut utilisée la loi Faible des grands nombres dans L^1 pour arriver au résultat.