Processus de branchement

1 Modélisation du problème

Définition :
On appelle **Processus de Branchement** (ou de **Galton-Watson**) le processus X défini par :

$$\begin{cases} X_0 = 1 \\ X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Y_{n,i} \end{cases}$$

- X_n désigne le nombre d'individus à la n-ième génération.
- $\forall i = 1 \dots X_n,\ \ Y_{n,i}$ désigne le nombre de descendants du i-ième individu à la n-ième génération.

On suppose les $(Y_{n,i})$ des V.A.I.I.D. de loi discrète (à valeurs dans $\mathbb{N}$), appelée **loi de fécondité** μ de moyenne m et de variance σ^2. On supposera de plus que $\mu(\{0\}) \neq 0$.

Proposition 1 :
(X_n) est une chaîne de Markov homogène.

En effet, pour toute fonction bornée sur $\mathbb{N}$, on a pour tout $n \geq 1$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$\mathbb{E}\left(f(X_{n+1}) \,|\, (X_0, \dots, X_n) = (1, x_1, \dots, x_n)\right) = \mathbb{E}\left(f\left(\sum_{i=1}^{x_n} Y_{n,i}\right) \,|\, (X_0, \dots, X_n) = (1, x_1, \dots, x_n)\right)$$

Or, les V.A. $(X_0, \dots, X_n)$ et $Y_{n,i}$ $(i \geq 1)$ sont indépendantes :

$$\mathbb{E}\left(f(X_{n+1}) \,|\, (X_0, \dots, X_n) = (1, x_1, \dots, x_n)\right) = \mathbb{E}\left(f\left(\sum_{i=1}^{x_n} Y_{n,i}\right)\right)$$

Proposition 2 :

$$\begin{array}{rcl} \text{X martingale} & \Longleftrightarrow & m = 1 \\ \text{X sur-martingale} & \Longleftrightarrow & m < 1 \\ \text{X sous-martingale} & \Longleftrightarrow & m > 1 \end{array}$$

Soit $(\mathcal{A}_n)$ la filtration naturelle du processus X : X est adapté à $(\mathcal{A}_n)$ et positif.
On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X_{n+1} \,|\, (X_0, \dots, X_n) = (1, x_1, \dots, x_n)\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{x_n} Y_{n,i} \,|\, (X_0, \dots, X_n) = (1, x_1, \dots, x_n)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{x_n} \mathbb{E}(Y_{n,i}) \qquad \text{car } Y_{n,i} \text{ ind. de } (X_0, \dots, X_n) \\ &= m x_n \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1}\,|\,\mathcal{A}_n\right) = mX_n$$

D'où :

$$\begin{array}{rcl} \text{X martingale} & \Longleftrightarrow & m = 1 \\ \text{X sur-martingale} & \Longleftrightarrow & m < 1 \\ \text{X sous-martingale} & \Longleftrightarrow & m > 1 \end{array}$$

2 Convergence du processus

2.1 Cas $m < 1$

X est donc une sur-martingale positive. Elle converge donc *p.s.* vers X_∞, une variable aléatoire telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mathbb{E}\left(X_\infty\,|\,\mathcal{A}_n\right) \leq X_n$$

De plus, X_n est intégrable (car $0 \leq \mathbb{E}(X_n\,|\,\mathcal{A}_0) \leq X_0 = 1$).

Donc X_∞ est intégrable et on a $0 \leq \mathbb{E}(X_\infty) \leq \mathbb{E}(X_n)$.

D'autre part,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = m\mathbb{E}(X_n) = m^{n+1}$$

Comme $m < 1$, on a donc

$$\lim_{n\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$$

D'où, par le lemme de Fatou, on en déduit que

$$0 \leq \mathbb{E}(X_\infty) \leq \liminf_{n\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$$

Comme X_∞ est positive, on a donc $X_\infty = 0$ *p.s.*.

Donc

$$X_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \quad p.s.$$

2.2 Cas $m = 1$

X est une martingale positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) = 1$.

X est donc bornée dans L^1 et donc convergente *p.s.* vers X_∞ une variable aléatoire positive finie *p.s.*. Donc

$$X_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} X_\infty \quad p.s.$$

avec X_∞ une v.a. positive finie.

2.3 Cas $m > 1$

On admet qu'il existe un unique $q \in]0,1[$ tel que $g(q) = q$, où g désigne la fonction génératrice de la loi de fécondité μ :

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\{n\})t^n$$

Soit $Z_n = q^{X_n}$.

Comme $q \in]0,1[$, la fonction $x \mapsto q^x$ est bornée par 1 sur $\mathbb{N}$. Donc les V.A. Z_n sont bornées dans L^2. De plus, on voit facilement que

$$\mathbb{E}\left(q^{X_{n+1}}\,|\,\mathcal{A}_n\right) = q^{X_n}$$

Donc Z est une martingale bornée dans L^2. Donc Z converge dans L^1, et *p.s.* vers U_∞ une v.a. positive finie *p.s.*.

Donc (X_n) converge *p.s.* vers X_∞ positive.

$$X_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} X_\infty \quad p.s.$$

avec X_∞ une v.a. positive.

De plus, on a

$$\left(\lim_{n\infty} q^{X_n}\right) \mathbf{1}_{(X_\infty=+\infty)} = 0$$

3 Détermination de l'état asymptotique

3.1 Récurrence et transience

Prenons $i \geq 1$.

X est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition M. On a pour tout $k > N$,

$$P\left(\bigcap_{n=N\ldots k} (X_n = i)\right) = P(X_k = i \,|\, X_{k-1} = i).P(X_{k-1} = i \,|\, X_{k-2} = i)\ldots.P(X_N = i) = (M(i,i))^{k-N}\, P(X_N = i)$$

D'où

$$\lim_{k\infty} P\left(\bigcap_{n=N\ldots k} (X_n = i)\right) = P\left(\bigcap_{n\geq N} (X_n = i)\right) = 0$$

D'où $P\left(\liminf_{n\infty} (X_n = i)\right) = 0$.

D'où, comme $(X_n) \subset \mathbb{N}$ et $X_n \to X_\infty$ *p.s.* $\in \overline{\mathbb{N}}$.

On a pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(X_\infty = i) \subset \liminf_n (X_n = i)$ *p.s.*. Donc $\forall i \geq 1$, $P(X_\infty = i) = 0$.

On a donc

$$\boxed{X_\infty \in \{0, +\infty\}\ p.s.}$$