Permutations alternantes
Nombres tangents-sécants

Yoann Gelineau

26 Mars 2009

Définition

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ *une permutation de* $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Définition

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ *une permutation de* $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.
On dit que σ *est une :*

- **permutation alternante montante** *si*

$$\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \sigma(4) > \dots$$

Définition

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ *une permutation de* $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.
On dit que σ *est une :*

- **permutation alternante montante** *si*

$$\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \sigma(4) > \dots$$

- **permutation alternante descendante** *si*

$$\sigma(1) > \sigma(2) < \sigma(3) > \sigma(4) < \dots$$

Définition

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ *une permutation de* $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$*.*
On dit que σ *est une :*

- **permutation alternante montante** *si*

$$\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \sigma(4) > \ldots$$

- **permutation alternante descendante** *si*

$$\sigma(1) > \sigma(2) < \sigma(3) > \sigma(4) < \ldots$$

On note leurs ensembles respectivement $\mathcal{A}_n^+$ *et* $\mathcal{A}_n^-$*.*
L'ensemble des permutations alternantes sur $[n]$ *est noté* $\mathcal{A}_n$*.*

Exemple : permutations alternantes sur [4] :

1324 – 1423 – 2314 – 2413 – 3412

2143 – 3142 – 3241 – 4132 – 4231

Exemple : permutations alternantes sur [4] :

1324 – 1423 – 2314 – 2413 – 3412

2143 – 3142 – 3241 – 4132 – 4231

Premières questions :

Peut-on trouver une formule close pour $|\mathcal{A}_n|$?
Pour $|\mathcal{A}_n^+|$?
Pour $|\mathcal{A}_n^-|$?

Proposition

Pour tout $n \geq 2$,

$$|\mathcal{A}_n| = 2|\mathcal{A}_n^+| = 2|\mathcal{A}_n^-|$$

Proposition

Pour tout $n \geq 2$,

$$|\mathcal{A}_n| = 2|\mathcal{A}_n^+| = 2|\mathcal{A}_n^-|$$

Preuve :

Il suffit de trouver une bijection entre $\mathcal{A}_n^+$ et $\mathcal{A}_n^-$.

Proposition

Pour tout $n \geq 2$,

$$|\mathcal{A}_n| = 2|\mathcal{A}_n^+| = 2|\mathcal{A}_n^-|$$

Preuve :

Il suffit de trouver une bijection entre $\mathcal{A}_n^+$ et $\mathcal{A}_n^-$.

Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on définit $\widetilde{\sigma}$ par :

$$\forall i = 1..n, \ \widetilde{\sigma}(i) = n + 1 - \sigma(i)$$

Alors $\varphi : \sigma \mapsto \widetilde{\sigma}$ est une involution, qui réalise une bijection entre $\mathcal{A}_n^+$ et $\mathcal{A}_n^-$.

Notation : on pose pour tout $n \geq 0$, $a_n = |\mathcal{A}_n^+|$.

Convention : $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

Notation : on pose pour tout $n \geq 0$, $a_n = |\mathcal{A}_n^+|$.

Convention : $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

Proposition

Pour tout $n \geq 1$,

$$2a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i a_{n-i}$$

Preuve :

On considère toutes les permutations alternées de $[n+1]$.

Preuve :

On considère toutes les permutations alternées de $[n+1]$.

- L'élément $(n+1)$ est situé en $(i+1)$-ième position. $(i = 0....n)$

Preuve :

On considère toutes les permutations alternées de $[n+1]$.

- L'élément $(n+1)$ est situé en $(i+1)$-ième position. $(i = 0....n)$
- On partage les n autres éléments en deux groupes : i éléments à placer avant $(n+1)$ et $n-i$ à placer après $(n+1)$:

Preuve :

On considère toutes les permutations alternées de $[n+1]$.

- L'élément $(n+1)$ est situé en $(i+1)$-ième position. $(i = 0....n)$
- On partage les n autres éléments en deux groupes : i éléments à placer avant $(n+1)$ et $n-i$ à placer après $(n+1)$:

$$\binom{n}{i} \text{ possibilités}$$

Preuve :

On considère toutes les permutations alternées de $[n+1]$.

- L'élément $(n+1)$ est situé en $(i+1)$-ième position. $(i = 0....n)$
- On partage les n autres éléments en deux groupes : i éléments à placer avant $(n+1)$ et $n-i$ à placer après $(n+1)$:

$$\binom{n}{i} \text{ possibilités}$$

- Les premiers éléments doivent former une permutation alternée avec $\sigma(i-1) > \sigma(i)$:

Preuve :
On considère toutes les permutations alternées de $[n+1]$.

- L'élément $(n+1)$ est situé en $(i+1)$-ième position. $(i = 0....n)$
- On partage les n autres éléments en deux groupes : i éléments à placer avant $(n+1)$ et $n-i$ à placer après $(n+1)$:

$$\binom{n}{i} \text{ possibilités}$$

- Les premiers éléments doivent former une permutation alternée avec $\sigma(i-1) > \sigma(i)$: a_i possibilités.

Preuve :
On considère toutes les permutations alternées de $[n+1]$.

- L'élément $(n+1)$ est situé en $(i+1)$-ième position. $(i = 0....n)$
- On partage les n autres éléments en deux groupes : i éléments à placer avant $(n+1)$ et $n-i$ à placer après $(n+1)$:

$$\binom{n}{i} \text{ possibilités}$$

- Les premiers éléments doivent former une permutation alternée avec $\sigma(i-1) > \sigma(i)$: a_i possibilités.
- Les derniers éléments doivent former une permutation alternée montante :

Preuve :
On considère toutes les permutations alternées de $[n+1]$.

- L'élément $(n+1)$ est situé en $(i+1)$-ième position. $(i = 0....n)$
- On partage les n autres éléments en deux groupes : i éléments à placer avant $(n+1)$ et $n-i$ à placer après $(n+1)$:

$$\binom{n}{i} \text{ possibilités}$$

- Les premiers éléments doivent former une permutation alternée avec $\sigma(i-1) > \sigma(i)$: a_i possibilités.
- Les derniers éléments doivent former une permutation alternée montante : a_{n-i} possibilités.

Preuve :
On considère toutes les permutations alternées de $[n+1]$.

- L'élément $(n+1)$ est situé en $(i+1)$-ième position. $(i = 0....n)$
- On partage les n autres éléments en deux groupes : i éléments à placer avant $(n+1)$ et $n-i$ à placer après $(n+1)$:

$$\binom{n}{i} \text{ possibilités}$$

- Les premiers éléments doivent former une permutation alternée avec $\sigma(i-1) > \sigma(i)$: a_i possibilités.
- Les derniers éléments doivent former une permutation alternée montante : a_{n-i} possibilités.

Ainsi :

$$2a_{n+1} = \binom{n}{0}a_0a_n + \binom{n}{1}a_1a_{n-1} + \binom{n}{2}a_2a_{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}a_na_0$$

On peut donc à présent calculer les a_n de proche en proche :

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1$$

$$a_3 = 2$$

$$a_4 = 5$$

$$a_5 = 16$$

$$a_6 = 61$$

$$a_7 = 272$$

$$a_8 = 1385$$

$$a_9 = 7936$$

$$\dots$$

Posons $F(x)$ la fonction génératrice exponentielle de la suite (a_n) :

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

et pour simplifier, posons $u_n = \dfrac{a_n}{n!}$ pour tout $n \geq 0$.

Posons $F(x)$ la fonction génératrice exponentielle de la suite (a_n) :

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

et pour simplifier, posons $u_n = \dfrac{a_n}{n!}$ pour tout $n \geq 0$. On a

$$\forall n \geq 1, \quad 2a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i a_{n-i}$$

Posons $F(x)$ la fonction génératrice exponentielle de la suite (a_n) :

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

et pour simplifier, posons $u_n = \dfrac{a_n}{n!}$ pour tout $n \geq 0$. On a

$$\forall n \geq 1, \quad 2a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i a_{n-i}$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq 1, \quad 2(n+1)u_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} u_i u_{n-i}$$

$F(x)$ est la fonction génératrice ordinaire de la suite (u_n) :

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$$

$F(x)$ est la fonction génératrice ordinaire de la suite (u_n) :

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
(F(x))^2 &= u_0^2 + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{i=0}^{n} u_i u_{n-i} \right) x^n \\
&= u_0^2 + 2.2 u_2 x + 2.3 u_3 x^2 + 2.4 u_4 x^3 + \dots \\
&= u_0^2 + 2 \left(F'(x) - u_1 \right)
\end{aligned}$$

F est donc solution de l'équation différentielle :

$$F^2 = 2F' - 1$$

F est donc solution de l'équation différentielle :

$$F^2 = 2F' - 1$$

On a donc

$$\text{Arctan } F(x) = \frac{x}{2} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

F est donc solution de l'équation différentielle :

$$F^2 = 2F' - 1$$

On a donc

$$\text{Arctan } F(x) = \frac{x}{2} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Comme $F(0) = u_0 = 1$, on a $k = \dfrac{\pi}{4}$,

$$\boxed{F(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Un peu de trigo :

$$2\tan(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2\sec(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Un peu de trigo :

$$2\tan(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2\sec(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{F(x) = \tan(x) + \sec(x)}$$

Un peu de trigo :

$$2\tan(x) = \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$2\sec(x) = \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{F(x) = \tan(x) + \sec(x)}$$

$$\sec(x) = \sum_{n\geq 0} a_{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + 5\frac{x^4}{4!} + 61\frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\tan(x) = \sum_{n\geq 0} a_{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + 2\frac{x^3}{3!} + 16\frac{x^5}{5!} + 272\frac{x^7}{7!} + \dots$$

Théorème

$$a_n = \begin{cases} \left[x^{2k}\right] \sec(x) & si\ n = 2k \\ \left[x^{2k+1}\right] \tan(x) & si\ n = 2k+1 \end{cases}$$

Théorème

$$a_n = \begin{cases} \left[x^{2k}\right] \sec(x) & si\ n = 2k \\ \left[x^{2k+1}\right] \tan(x) & si\ n = 2k+1 \end{cases}$$

Problème : $\tan(x)$ et $\sec(x)$ pas facilement manipulables.
$\Longrightarrow$ pas de formule close....

Définition

On définit $\mathcal{A}_{n,k}^{+}$ *l'ensemble des permutations alternantes montantes sur* $[n]$ *telles que*

$$\sigma(n) = k$$

On notera $a_{n,k} = |\mathcal{A}_{n,k}^{+}|$.

Définition

On définit $\mathcal{A}^{+}_{n,k}$ *l'ensemble des permutations alternantes montantes sur* $[n]$ *telles que*

$$\sigma(n) = k$$

On notera $a_{n,k} = |\mathcal{A}^{+}_{n,k}|$.

Remarques :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}$$

$$a_{2k+1,2k+1} = 0, \ \forall k \geq 1$$

$$a_{2k,1} = 0, \ \forall k \geq 1$$

Proposition

Lorsque $n = 2k$ $(k \geq 1)$*,*

$$a_{n,1} = 0$$

$$a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}, \ \forall j \in [n-1]$$

Lorsque $n = 2k + 1$ $(k \geq 1)$*,*

$$a_{n,n} = 0$$

$$a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}, \ \forall j \in [n-1]$$

$$\boxed{n \text{ pair } \implies a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}, \ \forall j \in [n-1]}$$

$$\boxed{n \text{ pair} \implies a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

Tout $\sigma \in \mathcal{A}^{+}_{n,j+1}$ finit par une montée :

$$\sigma(n-1) < \sigma(n) = j+1$$

$$\boxed{n \text{ pair} \implies a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

Tout $\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j+1}$ finit par une montée :

$$\sigma(n-1) < \sigma(n) = j+1$$

On partitionne $\mathcal{A}^+_{n,j+1}$ en $A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$, où

$$A = \{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j+1} \ / \ \sigma(n-1) < j\}$$

$$B = \{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j+1} \ / \ \sigma(n-1) = j\}$$

$$\boxed{n \text{ pair} \implies a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

Tout $\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j+1}$ finit par une montée :

$$\sigma(n-1) < \sigma(n) = j+1$$

On partitionne $\mathcal{A}^+_{n,j+1}$ en $A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$, où

$$A = \{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j+1} \ / \ \sigma(n-1) < j\}$$

$$B = \{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j+1} \ / \ \sigma(n-1) = j\}$$

$$\forall \sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j+1}, \quad \varphi(\sigma) = \begin{cases} t_{j,j+1} \circ \sigma & \text{si } \sigma \in A \\ \sigma & \text{si } \sigma \in B \end{cases}$$

Alors φ est une bijection qui envoie A sur $\mathcal{A}^+_{n,j}$.

$$\boxed{n \text{ pair } \implies a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

Tout $\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j+1}$ finit par une montée :

$$\sigma(n-1) < \sigma(n) = j+1$$

On partitionne $\mathcal{A}^+_{n,j+1}$ en $A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$, où

$$A = \{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j+1} \ / \ \sigma(n-1) < j\}$$

$$B = \{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j+1} \ / \ \sigma(n-1) = j\}$$

$$\forall \sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j+1}, \quad \psi(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{si } \sigma \in A \\ \widetilde{\sigma} & \text{si } \sigma \in B \end{cases}$$

où $\widetilde{\sigma}(i) = \sigma(i) - \chi(\sigma(i) \geq j+2)$
Alors ψ est une bijection qui envoie B sur (presque) $\mathcal{A}^+_{n-1,j}$.

$$\boxed{n \text{ impair} \implies a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

$$\boxed{n \text{ impair} \implies a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

Tout $\sigma \in \mathcal{A}^{+}_{n,j}$ finit par une descente :

$$\sigma(n-1) > \sigma(n) = j$$

$$\boxed{n \text{ impair} \implies a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}, \ \forall j \in [n-1]}$$

Tout $\sigma \in \mathcal{A}^{+}_{n,j}$ finit par une descente :

$$\sigma(n-1) > \sigma(n) = j$$

On partitionne $\mathcal{A}^{+}_{n,j}$ en $C \cup D$ avec $C \cap D = \emptyset$, où

$$C = \{\sigma \in \mathcal{A}^{+}_{n,j} \ / \ \sigma(n-1) > j+1\}$$

$$D = \{\sigma \in \mathcal{A}^{+}_{n,j} \ / \ \sigma(n-1) = j+1\}$$

$$\boxed{n \text{ impair } \implies a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}, \ \forall j \in [n-1]}$$

Tout $\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j}$ finit par une descente :

$$\sigma(n-1) > \sigma(n) = j$$

On partitionne $\mathcal{A}^+_{n,j}$ en $C \cup D$ avec $C \cap D = \emptyset$, où

$$C = \{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j} \ / \ \sigma(n-1) > j+1\}$$

$$D = \{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j} \ / \ \sigma(n-1) = j+1\}$$

$$\forall \sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j}, \quad \varphi(\sigma) = \begin{cases} t_{j,j+1} \circ \sigma & \text{si } \sigma \in A \\ \sigma & \text{si } \sigma \in B \end{cases}$$

Alors φ est une bijection qui envoie A sur $\mathcal{A}^+_{n,j+1}$.

$$\boxed{n \text{ impair } \implies a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

Tout $\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j}$ finit par une descente :

$$\sigma(n-1) > \sigma(n) = j$$

On partitionne $\mathcal{A}^+_{n,j}$ en $C \cup D$ avec $C \cap D = \emptyset$, où

$$C = \{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j} \ / \ \sigma(n-1) > j+1\}$$

$$D = \{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j} \ / \ \sigma(n-1) = j+1\}$$

$$\forall \sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j}, \quad \psi(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{si } \sigma \in A \\ \widetilde{\sigma} & \text{si } \sigma \in B \end{cases}$$

où $\widetilde{\sigma}(i) = \sigma(i) - \chi(\sigma(i) \geq j+2)$
Alors ψ est une bijection qui envoie B sur (presque) $\mathcal{A}^+_{n-1,j}$.

$$\boxed{n \text{ pair } \implies a_{n,1} = 0, \qquad a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

$$\boxed{n \text{ impair } \implies a_{n,n} = 0, \qquad a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

$$\boxed{n \text{ pair } \implies a_{n,1} = 0, \qquad a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}, \ \forall j \in [n-1]}$$

$$\boxed{n \text{ impair } \implies a_{n,n} = 0, \qquad a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}, \ \forall j \in [n-1]}$$

Table de Kempner

1

$$\boxed{n \text{ pair } \implies a_{n,1} = 0, \qquad a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

$$\boxed{n \text{ impair } \implies a_{n,n} = 0, \qquad a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

Table de Kempner

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ \rightarrow & & 0 & 1 \end{array}$$

$$\boxed{n \text{ pair } \implies a_{n,1} = 0, \qquad a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j}, \ \forall j \in [n-1]}$$

$$\boxed{n \text{ impair } \implies a_{n,n} = 0, \qquad a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j}, \ \forall j \in [n-1]}$$

Table de Kempner

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & & & \\
\rightarrow & 0 & 1 & & & \\
 & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow
\end{array}$$

$$\boxed{n \text{ pair} \implies a_{n,1} = 0, \qquad a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

$$\boxed{n \text{ impair} \implies a_{n,n} = 0, \qquad a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

Table de Kempner

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & \rightarrow & & 0 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & & 0 & 1 & 2 & 2 & &
\end{array}$$

$$\boxed{n \text{ pair} \implies a_{n,1} = 0, \qquad a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

$$\boxed{n \text{ impair} \implies a_{n,n} = 0, \qquad a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

Table de Kempner

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & \rightarrow & & 0 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & & 0 & 1 & 2 & 2 & & \\
 & & 5 & 5 & 4 & 2 & 0 & \leftarrow
\end{array}$$

$$\boxed{n \text{ pair} \implies a_{n,1} = 0, \qquad a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

$$\boxed{n \text{ impair} \implies a_{n,n} = 0, \qquad a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

Table de Kempner

$$\begin{array}{lcccccccl}
 & & & & 1 & & & & \\
\rightarrow & & & 0 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & & & \leftarrow \\
\rightarrow & & 0 & 1 & 2 & 2 & & & \\
 & & 5 & 5 & 4 & 2 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & 0 & 5 & 10 & 14 & 16 & 16 & &
\end{array}$$

$$\boxed{n \text{ pair} \implies a_{n,1} = 0, \qquad a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

$$\boxed{n \text{ impair} \implies a_{n,n} = 0, \qquad a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

Table de Kempner

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
\rightarrow & & & 0 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & & & \leftarrow \\
\rightarrow & & 0 & 1 & 2 & 2 & & & \\
 & & 5 & 5 & 4 & 2 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & 0 & 5 & 10 & 14 & 16 & 16 & & \\
 & 61 & 61 & 56 & 46 & 32 & 16 & 0 & \leftarrow
\end{array}$$

$$\boxed{n \text{ pair} \implies a_{n,1} = 0, \qquad a_{n,j+1} = a_{n,j} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

$$\boxed{n \text{ impair} \implies a_{n,n} = 0, \qquad a_{n,j} = a_{n,j+1} + a_{n-1,j},\ \forall j \in [n-1]}$$

Table de Kempner

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & \rightarrow & & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & 0 & & \leftarrow & & \\
 & & \rightarrow & & 0 & 1 & 2 & 2 & & & & \\
 & & & & 5 & 5 & 4 & 2 & 0 & & \leftarrow & \\
 & \rightarrow & & 0 & 5 & 10 & 14 & 16 & 16 & & & \\
 & & & 61 & 61 & 56 & 46 & 32 & 16 & 0 & & \leftarrow \\
\rightarrow & & 0 & 61 & 122 & 178 & 224 & 256 & 272 & 272 & &
\end{array}$$

Définition

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ *une permutation de* $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Pour $1 \leq i < j \leq n$, *on dit que le couple* (i, j) *est une* **inversion** *de la permutation* σ *si :*

$$\sigma(i) > \sigma(j)$$

On note $inv(\sigma)$ *le nombre d'inversions d'une permutation* σ.

Définition

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Pour $1 \leq i < j \leq n$, on dit que le couple (i, j) est une **inversion** *de la permutation σ si :*

$$\sigma(i) > \sigma(j)$$

On note $inv(\sigma)$ le nombre d'inversions d'une permutation σ.

Exemple :

$$\sigma = 4267315 \qquad \Longrightarrow \qquad inv(\sigma) = 11$$

A présent, on va faire une *q*-**déformation** des nombres précédents.

A présent, on va faire une *q*-**déformation** des nombres précédents.
On avait :

$$a_n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{|\mathcal{A}_n^+| \text{ fois}}$$

A présent, on va faire une q-**déformation** des nombres précédents.
On avait :

$$a_n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{|\mathcal{A}_n^+| \text{ fois}}$$

À présent, on va écrire

$$a_n(q) = \underbrace{q^{inv(\sigma_1)} + q^{inv(\sigma_2)} + q^{inv(\sigma_3)} + \ldots + q^{inv(\sigma_{a_n})}}_{|\mathcal{A}_n^+| \text{ fois}}$$

A présent, on va faire une q-**déformation** des nombres précédents.
On avait :

$$a_n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{|\mathcal{A}_n^+| \text{ fois}}$$

À présent, on va écrire

$$a_n(q) = \underbrace{q^{inv(\sigma_1)} + q^{inv(\sigma_2)} + q^{inv(\sigma_3)} + \ldots + q^{inv(\sigma_{a_n})}}_{|\mathcal{A}_n^+| \text{ fois}}$$

Autrement dit :

$$a_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n^+} 1 \qquad , \qquad a_n(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n^+} q^{inv(\sigma)}$$

et

$$\lim_{q \to 1} a_n(q) = a_n$$

De même, on posera :

$$a_{n,k} = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,k}} 1 \qquad , \qquad a_{n,k}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,k}} q^{inv(\sigma)}$$

et

$$\lim_{q \to 1} a_{n,k}(q) = a_{n,k}$$

De même, on posera :

$$a_{n,k} = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,k}} 1 \qquad , \qquad a_{n,k}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,k}} q^{inv(\sigma)}$$

et

$$\lim_{q \to 1} a_{n,k}(q) = a_{n,k}$$

Question : que deviennent les relations précédentes ?

Proposition

Lorsque $n = 2k$ $(k \geq 1)$,

$$a_{n,1}(q) = 0$$

$$a_{n,j+1}(q) = \frac{1}{q}\ a_{n,j}(q) + q^{n-j-1}\ a_{n-1,j}(q),\ \forall j \in [n-1]$$

Lorsque $n = 2k+1$ $(k \geq 1)$,

$$a_{n,n}(q) = 0$$

$$a_{n,j}(q) = q\ a_{n,j+1}(q) + q^{n-j}\ a_{n-1,j}(q),\ \forall j \in [n-1]$$

$$\boxed{n \text{ pair } \implies a_{n,j+1}(q) = \frac{1}{q}\, a_{n,j}(q) + q^{n-j-1}\, a_{n-1,j}(q), \ \forall j \in [n-1]}$$

$$\boxed{n \text{ pair } \implies a_{n,j+1}(q) = \frac{1}{q}\, a_{n,j}(q) + q^{n-j-1}\, a_{n-1,j}(q),\ \forall j \in [n-1]}$$

$$A = \{\sigma \in \mathcal{A}^{+}_{n,j+1} \ / \ \sigma(n-1) < j\}$$

$$\forall \sigma \in A, \quad \varphi(\sigma) = t_{j,j+1} \circ \sigma$$

Alors φ est une bijection qui envoie A sur $\mathcal{A}^{+}_{n,j}$ et

$$inv\varphi(\sigma) = inv(\sigma) + 1$$

$$\boxed{n \text{ pair } \implies a_{n,j+1}(q) = \frac{1}{q}\, a_{n,j}(q) + q^{n-j-1}\, a_{n-1,j}(q), \ \forall j \in [n-1]}$$

$$A = \{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j+1} \ / \ \sigma(n-1) < j\}$$

$$\forall \sigma \in A, \quad \varphi(\sigma) = t_{j,j+1} \circ \sigma$$

Alors φ est une bijection qui envoie A sur $\mathcal{A}^+_{n,j}$ et

$$inv\varphi(\sigma) = inv(\sigma) + 1$$

$$B = \{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j+1} \ / \ \sigma(n-1) = j\}$$

$$\forall \sigma \in B, \quad \psi(\sigma) = \widetilde{\sigma}$$

où $\widetilde{\sigma}(i) = \sigma(i) - \chi(\sigma(i) \geq j+2)$
Alors ψ est une bijection qui envoie B sur (presque) $\mathcal{A}^+_{n-1,j}$ et

$$inv\psi(\sigma) = inv(\widetilde{\sigma}) = inv(\sigma) - (n-j-1)$$

$$\boxed{n \text{ impair} \implies a_{n,j}(q) = q\ a_{n,j+1}(q) + q^{n-j}\ a_{n-1,j}(q),\ \forall j \in [n-1]}$$

$$\boxed{n \text{ impair } \implies a_{n,j}(q) = q\ a_{n,j+1}(q) + q^{n-j}\ a_{n-1,j}(q),\ \forall j \in [n-1]}$$

$$A = \{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j}\ /\ \sigma(n-1) > j+1\}$$

$$\forall \sigma \in A, \quad \varphi(\sigma) = t_{j,j+1} \circ \sigma$$

Alors φ est une bijection qui envoie A sur $\mathcal{A}^+_{n,j+1}$ et

$$inv\varphi(\sigma) = inv(\sigma) - 1$$

$$\boxed{n \text{ impair} \implies a_{n,j}(q) = q\ a_{n,j+1}(q) + q^{n-j}\ a_{n-1,j}(q),\ \forall j \in [n-1]}$$

$$A = \{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j}\ /\ \sigma(n-1) > j+1\}$$

$$\forall \sigma \in A, \quad \varphi(\sigma) = t_{j,j+1} \circ \sigma$$

Alors φ est une bijection qui envoie A sur $\mathcal{A}^+_{n,j+1}$ et

$$inv\varphi(\sigma) = inv(\sigma) - 1$$

$$B = \{\sigma \in \mathcal{A}^+_{n,j}\ /\ \sigma(n-1) = j+1\}$$

$$\forall \sigma \in B, \quad \psi(\sigma) = \widetilde{\sigma}$$

où $\widetilde{\sigma}(i) = \sigma(i) - \chi(\sigma(i) \geq j+2)$

Alors ψ est une bijection qui envoie B sur (presque) $\mathcal{A}^+_{n-1,j}$ et

$$inv\psi(\sigma) = inv(\widetilde{\sigma}) = inv(\sigma) - (n-j)$$

q-Table de Kempner

			1		
		0	1		
		q^2	q	0	
	0	q^4	$q^2 + q^3$	$q + q^2$	
	$q^5 + 2q^6 + q^7 + q^8$	$q^4 + 2q^5 + q^6 + q^7$	$q^3 + 2q^4 + q^5$	$q^2 + q^3$	0
0	$q^9 + 2q^{10} + q^{11} + q^{12}$	$q^7 + 3q^8 + 3q^9 + 2q^{10} + q^{11}$	$q^5 + 3q^6 + 4q^7 + 3q^8 + 2q^9 + q^{10}$	$q^3 + 2q^4 + 3q^5 + 4q^6 + 3q^7 + 2q^8 + q^9$	$q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + 3q^6 + 2q^7 + q^8$

On avait :

$$n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}}$$

On avait :

$$n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}}$$

À présent, on va écrire

$$[n]_q = \underbrace{1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}}_{n \text{ fois}} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

On avait :

$$n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}}$$

À présent, on va écrire

$$[n]_q = \underbrace{1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}}_{n \text{ fois}} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

On peut alors définir $[n]_q! = [n]_q[n-1]_q[n-2]_q \ldots [2]_q[1]_q$.

On définit alors des q-analogues des fonctions usuelles

$$e_q(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{[n]_q!}$$

On définit alors des q-analogues des fonctions usuelles

$$e_q(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{[n]_q!}$$

Puis,

$$\sin_q(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{[2n+1]_q!}, \qquad \cos_q(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{[2n]_q!}$$

On définit alors des q-analogues des fonctions usuelles

$$e_q(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{[n]_q!}$$

Puis,

$$\sin_q(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{[2n+1]_q!}, \qquad \cos_q(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{[2n]_q!}$$

Puis

$$\tan_q(z) = \frac{\sin_q(z)}{\cos_q(z)}, \qquad \sec_q(z) = \frac{1}{\cos_q(z)}$$

Proposition

Pour n pair,

$$a_n(q) = q^n \left[z^n\right] \sec_q(z)$$

Pour n impair,

$$a_n(q) = \left[z^n\right] \tan_q(z)$$

Définition

Soit A un anneau commutatif.
Soient $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, ..$ une suite d'éléments de A.

On appelle **matrice d'Euler-Seidel** *associée à (a_n) la suite double $(a_{n,k})_{n\geq 0, k\geq 0}$ donnée par la récurrence :*

$$\begin{cases} a_{n,0} = a_n, & n \geq 0 \\ a_{n,k} = a_{n,k-1} + a_{n+1,k-1} & n \geq 0, k \geq 1 \end{cases}$$

La suite $(a_n)_{n\geq 0} = (a_{n,0})_{n\geq 0}$, première ligne de la matrice est la **suite initiale**.
La suite $(a_{0,n})_{n\geq 0}$, première colonne de la matrice, est la **suite finale.**

$$a_{n,0} = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & & \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{30} & & & \\
\frac{1}{4} & -\frac{1}{20} & & & & \\
\frac{1}{5} & & & & &
\end{array}$$

Proposition

On a pour tout $n \geq 0$ et pour tout $k \geq 1$

$$a_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_{n+i,0}$$

En particulier, on passe de la suite initiale à la suite finale et inversement par :

$$a_{0,n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_{i,0}$$

$$a_{n,0} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a_{0,i}$$

Proposition

Posons

$$A(t) = \sum_{n \geq 0} a_{n,0} t^n$$

la fonction génératrice ordinaire de la suite initiale.
Alors la fonction génératrice ordinaire $B(t)$ de la suite finale est donnée par :

$$B(t) = \sum_{n \geq 0} a_{0,n} t^n = \frac{1}{1-t} A\left(\frac{t}{1-t}\right)$$

Proposition

Posons

$$E(t) = \sum_{n \geq 0} a_{n,0} \frac{t^n}{n!}$$

la fonction génératrice exponentielle de la suite initiale.
Alors la fonction génératrice exponentielle $F(t)$ de la suite finale est donnée par :

$$F(t) = \sum_{n \geq 0} a_{0,n} \frac{t^n}{n!} = e^t E(t)$$

$$a_{n,0} = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & & \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{30} & & & \\
\frac{1}{4} & -\frac{1}{20} & & & & \\
\frac{1}{5} & & & & &
\end{array}$$

$$a_{n,0} = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$A(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n = \frac{1}{t} \ln(1+t)$$

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{1}{1-t} A\left(\frac{t}{1-t}\right) \\ &= \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{t}{1-t}\right) \\ &= \frac{-1}{t} \ln(1-t) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} t^n \end{aligned}$$

$$a_{n,0} = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$E(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{t^n}{n!} = \frac{1 - e^{-t}}{t}$$

$$F(t) = \frac{e^t - 1}{t} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \frac{t^n}{n!}$$

Revenons à la table de Kempner :

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & \longrightarrow & & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & 0 & & \longleftarrow & & \\
 & & \longrightarrow & & 0 & 1 & 2 & 2 & & & & \\
 & & & & 5 & 5 & 4 & 2 & 0 & & \longleftarrow & \\
 & \longrightarrow & & 0 & 5 & 10 & 14 & 16 & 16 & & & \\
 & & & 61 & 61 & 56 & 46 & 32 & 16 & 0 & & \longleftarrow \\
\longrightarrow & & 0 & 61 & 122 & 178 & 224 & 256 & 272 & 272 & &
\end{array}
$$

Ecrite autrement :

1	1	0	2	0	16	0
0	1	2	2	16	16	
1	1	4	14	32		
0	5	10	46			
5	5	56				
0	61					
61						

$$E(t) = 1 + \tan(t), \qquad F(t) = \sec(t) \neq e^t \tan t$$

Si on rajoute des signes (où il faut...) :

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -16 & 0 \\
0 & -1 & 2 & 2 & -16 & -16 & \\
-1 & 1 & 4 & -14 & -32 & & \\
0 & 5 & -10 & -46 & & & \\
5 & -5 & -56 & & & & \\
0 & -61 & & & & & \\
-61 & & & & & &
\end{array}$$

$$E(t) = 1 - \mathrm{th}(t), \qquad F(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}(t)} = e^t E(t)$$

Les nombres tangents-sécants signés interviennent naturellement dans plusieurs formules contenant des statistiques de permutations

$$(-1)^n a_{2n+1} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n+1}} (-1)^{\mathrm{exc}(\sigma)}$$

$$(-1)^n a_{2n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} (-1)^{\mathrm{exc}(\sigma)} 0^{\mathrm{fix}(\sigma)}$$

où

$$exc(\sigma) = \left| \{ i \in [n] \ / \ \sigma(i) > i \} \right|$$
$$fix(\sigma) = \left| \{ i \in [n] \ / \ \sigma(i) = i \} \right|$$

Les nombres tangents-sécants signés interviennent naturellement dans plusieurs formules contenant des statistiques de permutations

$$(-1)^n a_{2n+1} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n+1}} (-1)^{\mathrm{exc}(\sigma)}$$

$$(-1)^n a_{2n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} (-1)^{\mathrm{exc}(\sigma)} 0^{\mathrm{fix}(\sigma)}$$

où

$$exc(\sigma) = \left| \{ i \in [n] \ / \ \sigma(i) > i \} \right|$$

$$fix(\sigma) = \left| \{ i \in [n] \ / \ \sigma(i) = i \} \right|$$

Posons alors

$$A_n(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x^{exc(\sigma)+1}$$

On retrouve alors $A_n(-1) = (-1)^n a_{2n+1}$

$$\begin{array}{ccccc}
1 & x & x+x^2 & x+4x^2+x^3 & x+11x \\
1+x & 2x+x^2 & 2x+5x^2+x^3 & 2x+5x^2+12x^3+x^4 & \\
1+3x+x^2 & 4x+6x^2+x^3 & 4x+20x^2+13x^3+x^4 & & \\
1+7x+7x^2+x^3 & 8x+26x^2+14x^3+x^4 & & & \\
1+15x+33x^2+15x^3+x^4 & & & &
\end{array}$$

Autre généralisation :
On note :

$$B_n(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{exc(\sigma)+1} q^{maj(\sigma)-exc(\sigma)}$$

où $maj(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} i \ \chi(\sigma(i) > \sigma(i+1))$.

Exemple : $\sigma = 4256731 \quad \Longrightarrow \quad maj(\sigma) = 1 + 5 + 6 = 12$

Autre généralisation :
On note :

$$B_n(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{exc(\sigma)+1} q^{maj(\sigma)-exc(\sigma)}$$

où $maj(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} i \; \chi(\sigma(i) > \sigma(i+1))$.

Exemple : $\sigma = 4256731 \implies maj(\sigma) = 1 + 5 + 6 = 12$

Proposition

$$(-1)^n B_{2n+1}(q) = a_{2n+1}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n^+} q^{inv(\sigma)}$$

Table d'Euler-Seidel normale :

$$\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 0 & q+q^2 & 0 \\
0 & -1 & q+q^2 & q+q^2 & \\
-1 & -1+q+q^2 & 2q+2q^2 & & \\
-2+q+q^2 & -1+3q+3q^2 & & & \\
-3+4q^2+4q & & & &
\end{array}$$

Table d'Euler-Seidel normale :

$$\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 0 & q+q^2 & 0 \\
0 & -1 & q+q^2 & q+q^2 & \\
-1 & -1+q+q^2 & 2q+2q^2 & & \\
-2+q+q^2 & -1+3q+3q^2 & & & \\
-3+4q^2+4q & & & &
\end{array}$$

Si on modifie la règle de la table d'Euler-Seidel :

$$a_{n,k} = q^{n-1} a_{n,k-1} + a_{n+1,k-1}$$

on obtient

$$\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 0 & q+q^2 & 0 \\
0 & -q & q+q^2 & q^4+q^5 & \\
-q & q & q^3+2q^4+q^5 & & \\
0 & q^2+q^3+2q^4+q^5 & & & \\
q^2+q^3+2q^4+q^5 & & & &
\end{array}$$

Table d'Euler-Seidel normale :

$$\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 0 & q+q^2 & 0 \\
0 & -1 & q+q^2 & q+q^2 & \\
-1 & -1+q+q^2 & 2q+2q^2 & & \\
-2+q+q^2 & -1+3q+3q^2 & & & \\
-3+4q^2+4q & & & &
\end{array}$$

Si on modifie la règle de la table d'Euler-Seidel :

$$a_{n,k} = q^{n-1} a_{n,k-1} + a_{n+1,k-1}$$

on obtient

$$\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 0 & q+q^2 & 0 \\
0 & -q & q+q^2 & q^4+q^5 & \\
-q & q & q^3+2q^4+q^5 & & \\
0 & q^2+q^3+2q^4+q^5 & & & \\
q^2+q^3+2q^4+q^5 & & & &
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ interprétation ?