Interprétations combinatoires des nombres de Jacobi-Stirling

Yoann Gelineau

15 Juin 2009

Les **nombres de Stirling (de seconde espèce)** $S(n,k)$ sont définis par la relation :

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$

Les **nombres de Stirling (de seconde espèce)** $S(n,k)$ sont définis par la relation :

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$

Ils comptent le nombre de :

- partitions de $[n] := \{1,2,\dots,n\}$ en k blocs non-vides.
- quasi-permutations super-diagonales de $[n] := \{1,2,\dots,n\}$ à k lignes vides.

Par exemple,

$$\pi = \big\{\{1,3,6\},\{2,5\},\{4\}\big\}$$

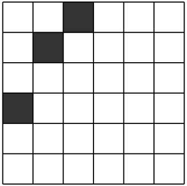
est une partition de $[6]$ en 3 blocs.

Par exemple,

$$\pi = \{\{1,3,6\},\{2,5\},\{4\}\}$$

est une partition de [6] en 3 blocs.

Elle correspond à la quasi-permutation suivante :



Les **nombres factoriels centraux (de seconde espèce)** $U(n, k)$ sont définis par la relation :

$$U(n, k) = U(n-1, k-1) + k^2 U(n-1, k)$$

Les **nombres factoriels centraux (de seconde espèce)** $U(n,k)$ sont définis par la relation :

$$U(n,k) = U(n-1,k-1) + k^2 U(n-1,k)$$

Ils comptent le nombre de :

- couples (π_1, π_2) de partitions de $[n]$ en k blocs, avec $\min(\pi_1) = \min(\pi_2)$.
- couples (Q_1, Q_2) de quasi-permutations supra-diagonales de $[n]$, avec Q_1 et Q_2 qui ont k lignes vides (en commun).

Par exemple, en posant

$$\pi_1 = \big\{\{1,3,6\},\{2,5\},\{4\}\big\}, \quad \pi_2 = \big\{\{1\},\{2,3,5\},\{4,6\}\big\},$$

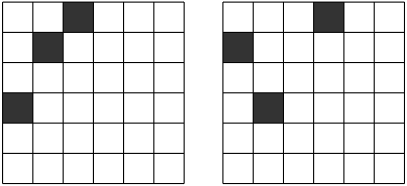
π_1 et π_2 sont des partitions de [6] en 3 blocs, avec $\min(\pi_1) = \min(\pi_2)$

Par exemple, en posant

$$\pi_1 = \big\{\{1,3,6\},\{2,5\},\{4\}\big\}, \quad \pi_2 = \big\{\{1\},\{2,3,5\},\{4,6\}\big\},$$

π_1 et π_2 sont des partitions de [6] en 3 blocs, avec $\min(\pi_1) = \min(\pi_2)$

Le couple (π_1, π_2) correspond au couple de quasi-permutations super-diagonales suivantes :



Définition

On appelle **nombres de Jacobi-Stirling (de seconde espèce)** *les nombres* $JS_n^k(z)$ *définis par la relation suivante :*

$$JS_n^k(z) = JS_{n-1}^{k-1}(z) + k(k+z)\, JS_{n-1}^k(z)$$

Définition

On appelle **nombres de Jacobi-Stirling (de seconde espèce)** *les nombres $JS_n^k(z)$ définis par la relation suivante :*

$$JS_n^k(z) = JS_{n-1}^{k-1}(z) + k(k+z)\, JS_{n-1}^k(z)$$

$\mathrm{JS}_n^k(z)$ est un polynôme en z de degré $n-k$:

$$\mathrm{JS}_n^k(z) = a_{n,k}^{(0)} + a_{n,k}^{(1)} z + \cdots + a_{n,k}^{(n-k)} z^{n-k}$$

Définition

On appelle **nombres de Jacobi-Stirling (de seconde espèce)** *les nombres* $JS_n^k(z)$ *définis par la relation suivante :*

$$JS_n^k(z) = JS_{n-1}^{k-1}(z) + k(k+z)\, JS_{n-1}^k(z)$$

$\mathrm{JS}_n^k(z)$ est un polynôme en z de degré $n-k$:

$$\mathrm{JS}_n^k(z) = a_{n,k}^{(0)} + a_{n,k}^{(1)} z + \cdots + a_{n,k}^{(n-k)} z^{n-k}$$

De plus,

$$a_{n,k}^{(n-k)} = S(n,k)$$

$$a_{n,k}^{(0)} = U(n,k)$$

Définition

*On appelle k-***partition signée** *de* $[\pm n]_0 = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$ *une partition de* $[\pm n]_0$ *en* $k+1$ *blocs non-vides* $B_0, B_1, \ldots, B_k$*, telle que*

- $0 \in B_0$ *et* $\forall i \in [n], \{i, -i\} \not\subset B_0$
- $\forall j \in [k], \forall i \in [n], \{i, -i\} \subset B_j \Leftrightarrow i = \min B_j \cap [n]$

Définition

*On appelle k-***partition signée** *de* $[\pm n]_0 = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$ *une partition de* $[\pm n]_0$ *en* $k+1$ *blocs non-vides* $B_0, B_1, \ldots, B_k$, *telle que*

- $0 \in B_0$ *et* $\forall i \in [n], \{i, -i\} \not\subset B_0$
- $\forall j \in [k], \forall i \in [n], \{i, -i\} \subset B_j \Leftrightarrow i = \min B_j \cap [n]$

Par exemple,

$$\pi = \big\{\{0, 2, -5\}, \{\pm 1, -2\}, \{\pm 3\}, \{\pm 4, 5\}\big\}$$

est une 3-partition signée de $[\pm 5]_0$.

Théorème

$a_{n,k}^{(i)}$ est égal au nombre de k-partitions signées de $[\pm n]_0$ ayant i valeurs négatives dans le bloc contenant 0.

Théorème

$a_{n,k}^{(i)}$ est égal au nombre de k-partitions signées de $[\pm n]_0$ ayant i valeurs négatives dans le bloc contenant 0.

Preuve : Puisque $\mathrm{JS}_n^k(z)$ vérifie la relation :

$$\mathrm{JS}_n^k(z) = \mathrm{JS}_{n-1}^{k-1}(z) + k(k+z)\,\mathrm{JS}_{n-1}^k(z),$$

il suffit de vérifier que le nombre cherché satisfait à la récurrence :

$$a_{n,k}^{(i)} = a_{n-1,k-1}^{(i)} + k a_{n-1,k}^{(i-1)} + k^2 a_{n-1,k}^{(i)}$$

Théorème

$a_{n,k}^{(i)}$ est égal au nombre de k-partitions signées de $[\pm n]_0$ ayant i valeurs négatives dans le bloc contenant 0.

Preuve : Puisque $\mathrm{JS}_n^k(z)$ vérifie la relation :

$$\mathrm{JS}_n^k(z) = \mathrm{JS}_{n-1}^{k-1}(z) + k(k+z)\,\mathrm{JS}_{n-1}^k(z),$$

il suffit de vérifier que le nombre cherché satisfait à la récurrence :

$$a_{n,k}^{(i)} = \underbrace{a_{n-1,k-1}^{(i)}}_{B_k=\{\pm n\}} + \underbrace{k a_{n-1,k}^{(i-1)}}_{-n\in B_0} + \underbrace{k^2 a_{n-1,k}^{(i)}}_{\text{autres cas}}$$

$$a_{n,k}^{(i)} = \sharp\{k-\text{partitions signées de } [\pm n]_0 \text{ ayant } i \text{ valeurs} < 0 \text{ dans } B_0\}$$

$a_{n,k}^{(i)} = \sharp\{k-$partitions signées de $[\pm n]_0$ ayant i valeurs < 0 dans $B_0\}$

$\Rightarrow$ <u>Pour $i = n - k$</u>, on retrouve l'interprétation de $S(n,k)$.

$$\pi = \big\{\{0,-3,-5,-6\},\{\pm 1,3,6\},\{\pm 2,5\},\{\pm 4\}\big\}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = \big\{\{1,3,6\},\{2,5\},\{4\}\big\}$$

$a_{n,k}^{(i)} = \sharp\{k-$partitions signées de $[\pm n]_0$ ayant i valeurs < 0 dans $B_0\}$

$\Rightarrow$ Pour $i = n-k$, on retrouve l'interprétation de $S(n,k)$.

$$\pi = \big\{\{0,-3,-5,-6\},\{\pm1,3,6\},\{\pm2,5\},\{\pm4\}\big\}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = \big\{\{1,3,6\},\{2,5\},\{4\}\big\}$$

$\Rightarrow$ Pour $i = 0$, on retrouve l'interprétation de $U(n,k)$.

$$\pi = \big\{\{0,3,6\},\{\pm1,-3,\},\{\pm2,-5\},\{\pm4,5,-6\}\big\}$$

$$\Downarrow$$

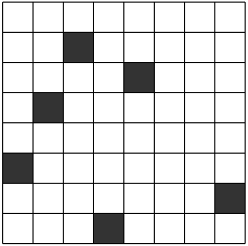
$$\pi_1 = \big\{\{1,3\},\{2\},\{4,5,6\}\big\}, \quad \pi_2 = \big\{\{1,3\},\{2,5\},\{4,6\}\big\}$$

Définition

*On appelle k-**quasi-permutation à simples équerres de** $[n]$ (abrégé en k-QPSE de $[n]$) une partie Q d'un tableau $[n] \times [n]$ telle que :*

- *Q soit contenue dans le graphe d'une permutation σ sans point fixe,*
- *chaque équerre diagonale contient au plus un élément,*
- *il y a k équerres diagonales qui sont vides.*

Par exemple,

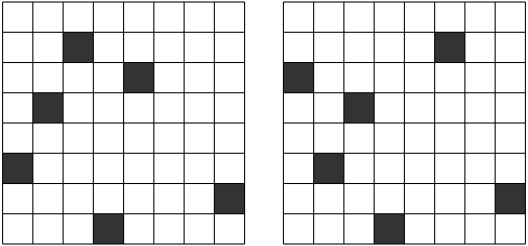


est une 2-QPSE de [8].

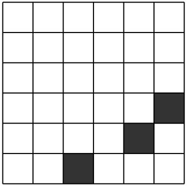
Théorème

$a_{n,k}^{(i)}$ compte également le nombre de couples (Q_1, Q_2) de k-QPSE de $[n]$ telles que

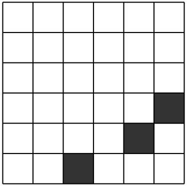
- *Q_1 et Q_2 ont k lignes vides (en commun),*
- *Q_1 et Q_2 sont égales dans leur partie sub-diagonale,*
- *Q_1 et Q_2 ont i cases remplies dans leur partie sub-diagonale.*



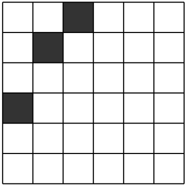
$\Rightarrow$ Pour $i = n - k$, on retrouve l'interprétation de $S(n, k)$.

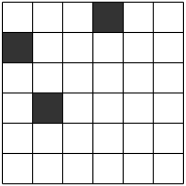


⇒ <u>Pour $i = n - k$</u>, on retrouve l'interprétation de $S(n, k)$.



⇒ <u>Pour $i = 0$</u>, on retrouve l'interprétation de $U(n, k)$.





Il existe une bijection entre ces deux modèles. Pour cela, on utilise un troisième résultat :

Théorème

$a_{n,k}^{(i)}$ est également le nombre de triplets (π_1, π_2, π_3) de partitions de $[n]$ en resp. $k+i$, $k+i$ et $n-i$ blocs tels que :

- $\min(\pi_1) = \min(\pi_2)$,
- $Sing(\pi_1) = Sing(\pi_2)$,
- $\min(\pi_1) \cup Sing(\pi_3) = [n]$,
- $Sing(\pi_1) \cup \min(\pi_3) = [n]$.

Les **nombres de Stirling (de première espèce)** $s(n, k)$ sont définis par la relation :

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) + (n-1)s(n-1, k)$$

Les **nombres de Stirling (de première espèce)** $s(n,k)$ sont définis par la relation :

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k)$$

Les **nombres factoriels centraux** $u(n,k)$ sont définis par la relation :

$$u(n,k) = u(n-1,k-1) + (n-1)^2u(n-1,k)$$

Les **nombres de Stirling (de première espèce)** $s(n, k)$ sont définis par la relation :

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) + (n-1)s(n-1, k)$$

Les **nombres factoriels centraux** $u(n, k)$ sont définis par la relation :

$$u(n, k) = u(n-1, k-1) + (n-1)^2 u(n-1, k)$$

$s(n, k)$ compte le nombre de permutations de $[n]$ en k cycles.
$u(n, k)$ n'avait pas d'interprétation jusqu'à présent.

Définition

On appelle **nombres de Jacobi-Stirling (de première espèce)** *les nombres* $js_n^k(z)$ *définis par la relation suivante :*

$$js_n^k(z) = js_{n-1}^{k-1}(z) + (n-1)(n-1+z)\, js_{n-1}^k(z)$$

Définition

On appelle **nombres de Jacobi-Stirling (de première espèce)** *les nombres* $js_n^k(z)$ *définis par la relation suivante :*

$$js_n^k(z) = js_{n-1}^{k-1}(z) + (n-1)(n-1+z)\, js_{n-1}^k(z)$$

$\mathrm{js}_n^k(z)$ est un polynôme en z de degré $n-k$:

$$\mathrm{js}_n^k(z) = b_{n,k}^{(0)} + b_{n,k}^{(1)} z + \cdots + b_{n,k}^{(n-k)} z^{n-k}$$

Définition

On appelle **nombres de Jacobi-Stirling (de première espèce)** *les nombres $js_n^k(z)$ définis par la relation suivante :*

$$js_n^k(z) = js_{n-1}^{k-1}(z) + (n-1)(n-1+z)\, js_{n-1}^k(z)$$

$\mathrm{js}_n^k(z)$ est un polynôme en z de degré $n-k$:

$$\mathrm{js}_n^k(z) = b_{n,k}^{(0)} + b_{n,k}^{(1)} z + \cdots + b_{n,k}^{(n-k)} z^{n-k}$$

De plus,

$$b_{n,k}^{(n-k)} = s(n,k)$$

$$b_{n,k}^{(0)} = u(n,k)$$

Définition

Soit $w = w(1)w(2)\dots w(\ell)$ *un mot sur l'aphabet* $[n]$*. Une lettre* $w(j)$ *est un* **élément saillant** *de* w *si*

$$w(j) < w(k), \qquad \forall k = 1 \dots j-1$$

On note $rec(w)$ *le nombre d'éléments saillants de* w *et* $rec_0(w) = rec(w) - 1$*.*

Définition

Soit $w = w(1)w(2)\dots w(\ell)$ un mot sur l'aphabet $[n]$. Une lettre $w(j)$ est un **élément saillant** *de w si*

$$w(j) < w(k), \qquad \forall k = 1 \dots j-1$$

On note $rec(w)$ le nombre d'éléments saillants de w et $rec_0(w) = rec(w) - 1$.

Par exemple, pour

$$w = 5\,7\,4\,8\,6\,2\,3\,1\,9,$$

les éléments saillants sont

$$5, 4, 2, 1.$$

Ainsi, $\mathrm{rec}(w) = 4$ et $\mathrm{rec}_0(w) = 3$.

Théorème

$b_{n,k}^{(i)}$ *est le nombre de couples* (σ, τ) *où :*

- σ *est une permutation de* $[n] \cup \{0\}$ *en* k *cycles,*
- τ *est une permutation de* $[n]$ *en* k *cycles,*
- σ *et* τ *ont mêmes minima de cycles,*
- $1 \in Orb_\sigma(0)$ *et* $rec_0(w) = i$
  où $w = \sigma(0) \dots \sigma^\ell(0)$ *avec* $\sigma^{\ell+1}(0) = 0$.

Théorème

$b_{n,k}^{(i)}$ *est le nombre de couples* (σ, τ) *où :*

- σ *est une permutation de* $[n] \cup \{0\}$ *en* k *cycles,*
- τ *est une permutation de* $[n]$ *en* k *cycles,*
- σ *et* τ *ont mêmes minima de cycles,*
- $1 \in Orb_\sigma(0)$ *et* $rec_0(w) = i$
  où $w = \sigma(0) \dots \sigma^\ell(0)$ *avec* $\sigma^{\ell+1}(0) = 0$.

Idée : interpréter la formule

$$b_{n,k}^{(i)} = b_{n-1,k-1}^{(i)} + (n-1) b_{n-1,k}^{(i-1)} + (n-1)^2 b_{n-1,k}^{(i)}$$

$\Rightarrow$ Pour $i = n - k$, on retrouve l'interprétation de $s(n, k)$.

$\Rightarrow$ Pour $i = n - k$, on retrouve l'interprétation de $s(n,k)$.

$\Rightarrow$ Pour $i = 0$, on trouve une interprétation pour $u(n,k)$.

$u(n,k)$ est le nombre de couples de permutations (σ_1, σ_2) de $[n]$ en k cycles avec mêmes minima de cycles.