

Remplissages et suites croissantes/décroissantes dans les polyominos

Yoann Gelineau

05 Septembre 2007

1 Introduction

Depuis quelques années, de nouveaux objets sont apparus en combinatoire, et ont donnés des résultats assez semblables malgré des approches différentes. Christian Krattenthaler parle dans [7] d'un possible "big picture" dont ces récents résultats seraient tous issus. Certains articles, notamment celui de Steingrímsson-Williams [10] sur les tableaux de permutation, ont posé de nombreux problèmes ouverts autour ce thème qui depuis, sollicitent de nombreux chercheurs de combinatoire.

Nous allons ici examiner en détail certains résultats qui portent sur les remplissages ou non-remplissages de polyominos par des suites d'entiers. Ce problème, énoncé pour la première fois par Chen, Deng, Du, Stanley et Yan dans leur article [2] concernait au premier abord des croisements et emboîtements dans des partitions d'ensemble et ce sera donc l'objet des parties suivantes. C'est Krattenthaler qui effectua en premier le lien avec les remplissages des polyominos [7], ce qui donna à Rubey [11] l'occasion de prolonger ces résultats en un problème plus général.

2 Quelques outils préalables

2.1 Les polyominos

Rappelons qu'un *polyomino* (non nécessairement rectangulaire) est un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^2 où un élément de \mathbb{Z}^2 est considéré comme une case :

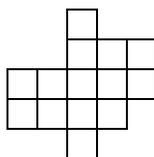


Figure 1: Un polyomino

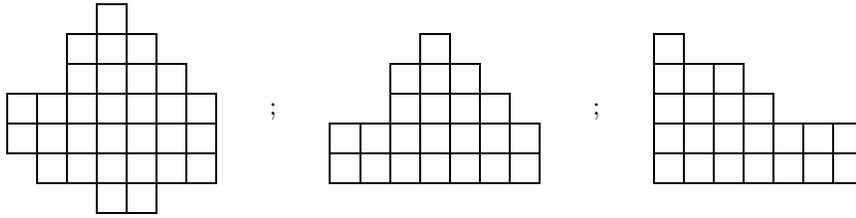


Figure 2: De bons exemples de moon polyominoes

Définition 1 Un polyomino est dit convexe si, dans une colonne, deux cases sont reliées par des cases entre elles, et si, dans chaque ligne, deux cases sont reliées par des cases entre elles.

Un polyomino est dit de libre intersection si ses colonnes sont deux à deux incluables l'une dans l'autre. Cette inclusion doit être comprise comme suit : si on superpose les 2 colonnes de mon polyomino, sans les décaler verticalement, alors l'une sera dans l'autre (Le résultat est tout à fait équivalent si cette inclusion se fait sur les lignes).

Un polyomino qui vérifie à la fois la convexité et la libre intersection est appelé un moon polyomino.

Par exemple, le polyomino pris en exemple précédemment n'est pas un moon polyomino car entre sa première colonne et sa dernière, aucune n'est incluable dans l'autre (la libre intersection n'était pas vérifiée).

Un cas particulier de moon polyomino est le cas d'un *polyomino tas*, c'est à dire lorsque toutes les colonnes du polyomino commencent au même niveau (comme si on superposait des cubes "en tas" sur une table). Les deux exemples de droite ci-dessus en sont des illustrations.

Le troisième cas d'un polyomino tas où les colonnes forment une suite "décroissante" est appelé un *diagramme de Ferrers*. (lien avec les partitions d'entiers).

Définition 2 Soit P un polyomino quelconque. On définit $S(P)$, la structure du polyomino, comme la suite décroissante des hauteurs de ses colonnes.

Pour reprendre les trois exemples ci-dessus, le premier polyomino a pour structure $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$, les deux autres ont tous deux pour structure $(5, 4, 4, 3, 2, 2)$.

2.2 Suites croissantes et décroissantes dans les polyominoes

Nous avons jusqu'à présent établi les définitions de base des polyominoes, nous allons maintenant remplir chaque case par un entier naturel quelconque. Par souci de lecture, une case remplie par un 0 sera laissée vide.

On définit une *chaîne Nord-Est*, notée chaîne NE , par une suite d'entrées non nulles du polyomino, situées chacune en haut et à droite de la précédente, ceci au "sens large" (possibilité qu'une entrée se trouve seulement au dessus ou seulement à droite de la précédente), avec la condition supplémentaire que le plus petit rectangle contenant la première et la dernière entrée de la suite soit totalement inclus dans le polyomino.

De même, nous définissons une *chaîne Sud-Est*, notée chaîne SE , par une suite d'entrées non nulles du polyomino, situées chacune en bas et à droite de la précédente, ceci au "sens large", avec la condition supplémentaire que le plus petit rectangle contenant la première et la dernière entrée de la suite soit totalement inclus dans le polyomino.

On définit une *chaîne nord-est*, notée chaîne *ne* (en minuscule), par une chaîne Nord-Est, où on impose une croissance stricte entre chaque entrée, c'est à dire que chaque entrée est située strictement en haut et à droite de la précédente. La condition supplémentaire de contenance du plus petit rectangle doit également être conservée.

De même, on définit une *chaîne sud-est*, notée chaîne *se* (en minuscule), par une chaîne Sud-Est, où on impose une décroissance stricte entre chaque entrée, c'est à dire que chaque entrée est située strictement en bas et à droite de la précédente. La condition supplémentaire de contenance du plus petit rectangle doit également être conservée.

On définira aussi les chaînes de type *nE*, *Ne*, *sE*, *Se*, de la même manière que précédemment, en imposant une condition stricte sur la lettre minuscule et large pour la lettre majuscule.

Pour une chaîne d'un des types précédents, on définit alors sa *longueur* par :

- soit, naïvement, le nombre d'entrées non nulles de la chaîne, lorsque le type de la chaîne contient une croissance et/ou décroissance qui est stricte.
- soit, lorsque la chaîne est de type *NE* ou *SE* (les deux croissances au sens large), le nombre d'entrées non nulles de la chaîne mais comptées avec multiplicités (un 3 dans la chaîne apportera un 3 à la longueur de la chaîne, ...)

Pour chacun des types de chaînes précédents, on notera alors $|NE|, |se|, |Ne|, \dots$ la longueur de la plus longue chaîne du type correspondant. Voyons immédiatement un exemple pour éclairer ces définitions :

	1			$ ne = 3$
		1	3	$ se = 2$
3		1		$ nE = 4$
		1		$ Ne = 3$
1	1			$ sE = 3$
				$ Se = 2$
				$ NE = 6$
				$ SE = 5$

3 Diagrammes de croissance et jeu de Taquin

3.1 Diagramme de croissance

Le cas d'un polyomino rectangulaire

Nous allons à présent définir ce qu'on appelle le diagramme de croissance d'un polyomino rempli avec des entiers naturels, tout d'abord pour des polyominos rectangulaires, puis pour des diagrammes de Ferrers. Ces objets ont été introduits par Fomin [4], détaillés par Stanley dans [9] et ont des liens avec les partitions et leur représentation en diagramme de Ferrers. Ils ont été par la suite réutilisés par Krattenthaler [7] et Rubey [11] pour établir des résultats intéressants sur le nombre de remplissages de certains polyominos.

Prenons pour commencer un polyomino particulier : le cas d'un particulier rectangulaire. On le remplit alors par des 0 et des 1, de telle sorte qu'il n'y ait pas plus d'un 1 par ligne et par colonne (il peut donc en particulier ne pas y en avoir du tout sur une ligne/colonne). Par souci de présentation, on remplace ici les "0" par des cases vides et les "1" par des croix. De tels polyominos remplissant les conditions précédentes seront dénommés par la suite par *0-1-polyomino*. Quelques exemples sont rassemblés dans la figure 3.

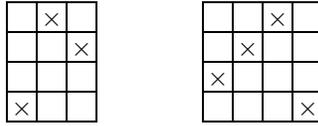


Figure 3: Exemples de 0-1-Polyominos

On va chercher à étiqueter les coins de chaque case par une partition, grâce à la construction suivante. On va libeller les coins par récurrence, en posant déjà la partition vide \emptyset dans chaque coin le long du bord gauche et du bord du bas de notre polyomino. Puis, supposons que nous ayons déjà libellé tous les coins d'une case exceptée celle en haut à droite par des partitions λ, μ, ν comme sur la figure 4, alors, on va avoir la partition ρ définie par les 4 règles suivantes :

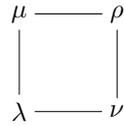


Figure 4: Une case d'un diagramme de croissance

- F1** Si $\lambda = \mu = \nu$ et si la case ne comporte pas de croix, alors $\rho = \lambda = \mu = \nu$.
- F2** Si $\mu \neq \nu$, alors $\rho = \mu \cup \nu$.
- F3** Si $\mu = \nu \neq \lambda$, alors ρ sera μ auquel on rajoute un 1 à la ligne $i + 1$ si μ et λ diffèrent à la ligne i .
- F4** Si $\lambda = \mu = \nu$ et si la case comporte une croix, alors ρ sera λ auquel on rajoute un 1 à sa première part.

Le diagramme étiqueté obtenu est appelé le *diagramme de croissance* associé au 0-1-polyomino que nous avons choisi. Un exemple se trouve dans la figure 5.

Ce processus d'étiquetage est totalement réversible. Ainsi, si on se donne à l'inverse chaque coin le long du bord droit et du bord du haut, on peut parfaitement retrouver toutes les étiquettes du diagramme, ainsi que le remplissage du tableau par les 0 et les 1.

Par récurrence, supposons que nous ayons déjà libellé tous les coins d'une case exceptée celle en bas à gauche par des partitions ρ, μ, ν comme sur la figure 4. Alors, on va avoir la partition λ définie par les 4 règles suivantes :

- B1** Si $\mu = \nu = \rho$, on pose $\lambda = \rho$ et on laisse la case vide.
- B2** Si $\mu \neq \nu$, on pose $\lambda = \mu \cap \nu$ et on laisse la case vide.
- B3** Si $\mu = \nu \subset \rho$ on obtient λ à partir du μ en enlevant un 1 à la ligne $i - 1$ si μ et ρ diffèrent à la ligne i , et on laisse la case vide.
- B4** Si $\mu = \nu \subset \rho$ et si μ et ν diffèrent dans leur première part, alors $\lambda = \mu$ et on met une croix dans la case.

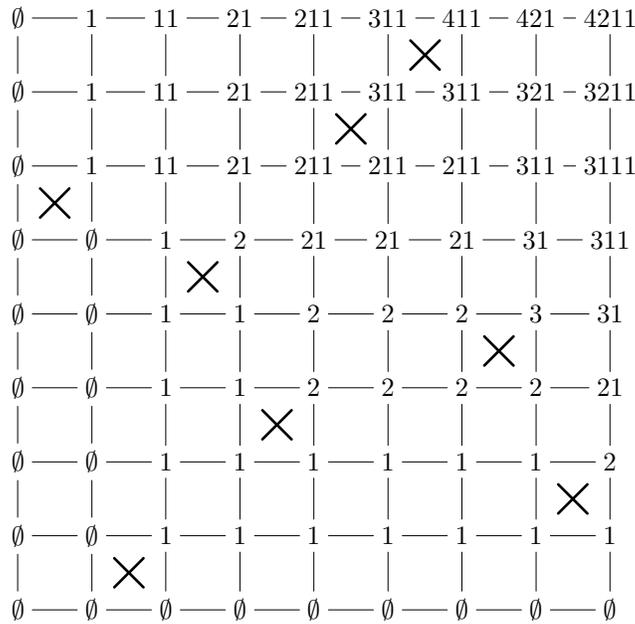


Figure 5: Un exemple de diagramme de croissance

On peut d'ailleurs vérifier à l'inverse qu'avec la suite de partitions

$$(\emptyset, 1, 11, 21, 211, 311, 411, 421, 4211, 3211, 3111, 311, 31, 21, 2, 1, \emptyset)$$

on peut retrouver le remplissage de la figure 5.

On peut donc en déduire le théorème suivant :

Théorème 3 Soit F un polyomino rectangulaire fixé. Alors les remplissages de F par les $0-1$ (avec la propriété que chaque ligne et chaque colonne ne contienne pas plus d'un 1) sont en bijection avec les suites de partitions $(\emptyset = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k = \emptyset)$ telles que λ_{i-1} et λ_i diffèrent d'au plus une case, et que $(\lambda_i)_i$ forme une suite unimodale pour la relation d'ordre \subset (c'est à dire $\exists j \in \{1 \dots k\} / \lambda_0 \subset \dots \subset \lambda_j \supset \dots \supset \lambda_k$).

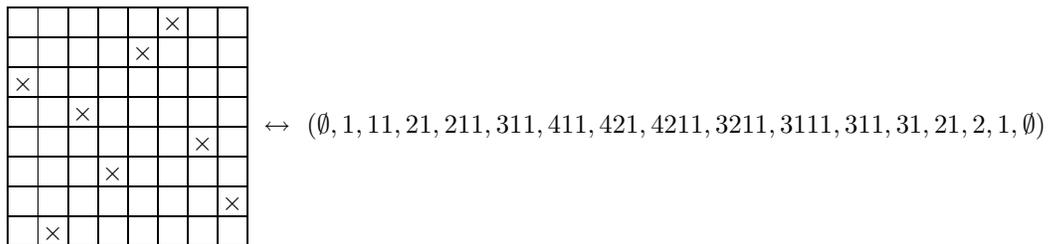


Figure 6: Un exemple de bijection 0-1-polyomino \leftrightarrow suite de partitions

Voici quelques propriétés des diagrammes de croissance qui sont immédiates.

Proposition 4

1. Une partition du diagramme de croissance est soit égale à sa voisine de droite ou alors plus petite d'exactly une case.

2. Une partition et sa voisine de droite sont égales si et seulement si la colonne de cases du polyomino sous elles ne contient pas de 1 et si leurs voisins du dessous sont aussi égaux entre eux.
3. Une partition du diagramme de croissance est soit égale à sa voisine du dessus ou alors plus petite d'exactlyement une case.
4. Une partition et sa voisine du dessus sont égales si et seulement si la ligne de cases à leur gauche ne contient pas de 1 et si leurs voisins de gauche sont aussi égaux entre eux.

Généralisation à des remplissages dans \mathbb{N}

Jusqu'à maintenant, on n'a défini les diagrammes de croissance que pour un polyomino rectangulaire rempli avec des 0 – 1 avec au plus un 1 par ligne et par colonne. On peut de même, définir les diagrammes de croissance pour un polyomino rectangulaire rempli avec des entiers naturels quelconques, en se "ramenant" à un polyomino de la forme précédente.

Ainsi, pour un remplissage quelconque d'un polyomino, on va augmenter le nombre de lignes et de colonnes de notre polyomino afin de "séparer" en quelque sorte nos entiers. Ainsi, chaque ligne et chaque colonne de notre polyomino sera remplacé par autant de lignes/colonnes qu'elle contient d'entrées (avec multiplicité), et dans ces nouvelles lignes/colonnes, on placera seulement un 1 par ligne/colonne de manière qu'on place les entrées du nouveau diagramme en des chaînes de direction Nord-Est, ceci dans chaque ligne et chaque colonne.

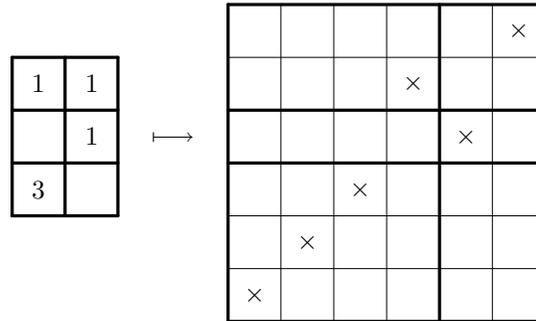


Figure 7: Polyomino rempli par des entiers naturels quelconques

Remarquons qu'on pourrait de manière tout à fait équivalente placer les nouvelles entrées de manière à les aligner en des chaînes de direction Sud-Est, ceci dans chaque ligne et chaque colonne.

Mais ce qui est important ici, c'est de pouvoir toujours se ramener à un 0-1-polyomino. Ainsi, pour chaque polyomino rempli par des entiers naturels quelconques, on dira que son diagramme de croissance associé est le diagramme de croissance obtenu pour le diagramme "étiré" comme précédemment.

Le cas des diagrammes de Ferrers

Nous avons défini jusqu'à présent les diagrammes de croissance uniquement pour des polyominos rectangulaires. En fait, ces définitions sont aisément étendues plus généralement

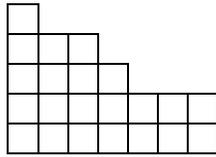


Figure 8: Un exemple de Diagramme de Ferrers

aux diagrammes de Ferrers, c'est à dire un polyomino tas (dont les colonnes commencent toutes au même niveau) telles que les colonnes soient en ordre décroissant.

Remarquons donc qu'un diagramme de Ferrers revient simplement à la donnée d'une suite finie d'éléments de $\{D, R\}$ correspondant au bord en haut à droite du diagramme (D =down, R =right). Par exemple, dans la figure 8, ce diagramme de Ferrers est donné par la suite

$$(R, D, R, R, D, R, D, R, R, R, D, D)$$

A présent, on remplit notre diagramme de Ferrers par des 0 et des 1 de manière à ce que chaque ligne et chaque colonne contienne au plus un 1 (par souci de présentation, on se contentera de laisser des cases vides quand on a des 0 et de placer un X où il y a un 1). Nous désignerons de tels remplissage par un 0-1-Ferrers. Bien entendu, la généralisation aux remplissages par des entiers quelconques pourrait se faire semblablement aux rectangles, on peut donc se contenter des remplissages par des 0 et des 1.

Nous pouvons alors associer à notre 0-1-Ferrers un libellage des coins de ses cases, qu'on appellera encore son *Diagramme de Croissance*. Pour cela, on utilise exactement les mêmes règles $F1$ à $F4$ que précédemment.

Remarquons qu'à nouveau, le procédé d'étiquetage d'un diagramme de Ferrers est tout à fait réversible. En effet, en réutilisant les règles $B1$ à $B4$ précédentes, on peut retrouver le 0-1-Ferrers donné au départ. De plus les propriétés énoncées par la proposition 4 sont encore vérifiées.

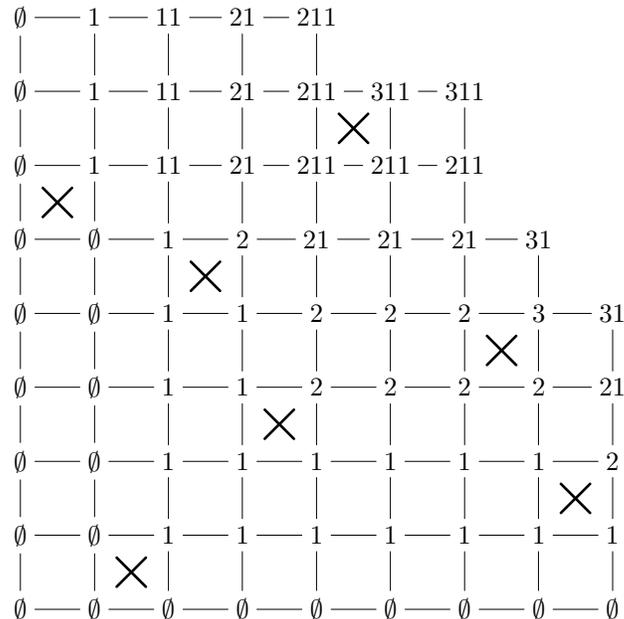


Figure 9: Un diagramme de croissance pour un diagramme de Ferrers

On a donc le théorème suivant :

Théorème 5

Soit F un diagramme de Ferrers donné par une suite $\omega = \omega_1\omega_2\dots\omega_k \in \{D, R\}^k$. Alors les 0-1-remplissages de F (tels que chaque ligne et chaque colonne ne contienne pas plus d'un 1) est en bijection avec les suites $(\emptyset = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda^k = \emptyset)$, où λ_i ne diffère de λ_{i+1} que d'une seule case au plus, $\lambda_i \subset \lambda_{i+1}$ si $\omega_{i+1} = R$, et $\lambda_i \supset \lambda_{i+1}$ si $\omega_{i+1} = D$.

De plus, $\lambda_i \subsetneq \lambda_{i+1}$ si et seulement s'il y a un 1 dans la colonne de F sous les coins λ_i et λ_{i+1} , et on a $\lambda_i \supsetneq \lambda_{i+1}$ si et seulement s'il y a un 1 dans la ligne à gauche de λ_i et λ_{i+1} .

Un exemple de diagramme de croissance pour un diagramme de Ferrers est donné dans la figure 9.

Citons au passage un théorème très important en rapport avec les diagrammes de croissance de tableaux de Ferrers :

Théorème 6 (de Greene)

Soit un diagramme de Ferrers F rempli par des 0-1 avec au plus un 1 par ligne et par colonne. Soit π le diagramme de croissance associé à F et soit c un coin de F libellé dans π par la partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Alors :

- (i) Pour tout entier k , le nombre maximal d'union de k NE-chaînes situées dans le rectangle en bas à gauche de c est égal à $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$.
- (ii) Pour tout entier k , le nombre maximal d'union de k SE-chaînes situées dans le rectangle en bas à gauche de c est égal à $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k$, où $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ désigne la partition conjuguée de λ .

Nous noterons à titre culturel que les diagrammes de croissance peuvent se généraliser de manière simple à des polyominos plus généraux comme les polyominos tas. Une présentation de ces diagrammes dits *généralisés* est présentée en Annexe 1.

3.2 Jeu de Taquin sur les diagrammes de croissance

Nous venons de définir le diagramme de croissance associé à un polyomino rempli par des entiers, nous allons à présent voir comment se traduit un Jeu de Taquin sur ces diagrammes particuliers.

Rappelons que le Jeu de Taquin historiquement connu sous ce nom a été introduit par Marcel Schützenberger et consiste en un déplacement de cases pour qu'un tableau gauche devienne un tableau standard de Young. Ici, nous allons voir une autre version de ce mécanisme.

Prenons une suite croissante (pour l'inclusion) de partitions

$$P = (\emptyset = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

où chaque λ_{i-1} diffère du λ_i d'au plus un élément. À P , nous allons associer une nouvelle suite croissante de partitions

$$\overline{jdt}(P) = (\emptyset = \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$$

avec les propriétés suivantes : Pour commencer,

- Si $\lambda_1 = \emptyset$, on pose $\mu_i = \lambda_{i+1}$ pour $i < n$ et $\mu_n = \lambda_n$.

- Si $\lambda_1 \neq \emptyset$, on pose $\mu_0 = \emptyset$.

Ensuite, supposons que nous ayons construit μ_{i-1} pour un certain $i < n$.

- **1er cas :** $\lambda_{i+1} = \lambda_i$. Alors on pose $\mu_i = \mu_{i-1}$
- **2ème cas :** Si ν est l'unique partition qui contient μ_{i-1} et est contenue dans λ_{i+1} , on pose $\mu_i = \nu$. Sinon, il n'en existe qu'une seule qui est différente de λ_i , et on pose alors μ_i égal à cette partition.

Enfin, on pose $\mu(n) = \lambda(n)$.

Voyons un exemple pour mieux comprendre cette transformation. Par commodité, on écrira en ligne la partition λ et la partition μ sera décrite en dessous, décalée d'un rang vers la droite, de telle sorte que μ_i soit sous λ_{i+1} (ce choix s'explique par le fait que μ_i sera construit à partir de μ_{i-1} – à sa gauche – et de λ_{i+1} – en dessus).

Ici, prenons

$$P = (\emptyset, 1, 2, 21, 211, 211, 311, 321, 3211, 3311)$$

Alors la transformation se fait comme suit :

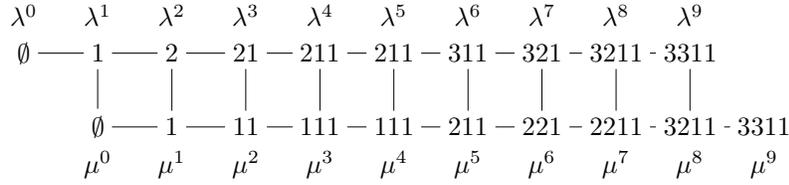


Figure 10: Un jeu de taquin sur une suite de partitions

D'où

$$\overline{jdt}(P) = (\emptyset, 1, 11, 111, 111, 211, 221, 2211, 3211, 3311)$$

Nous avons donc défini le Jeu de Taquin pour une suite de partitions croissantes d'au plus une case comme précédemment, nous allons maintenant définir le Jeu de Taquin pour un 0-1-polyomino.

Définition 7 Soit P un polyomino rempli avec des entiers naturels, et soit Δ le diagramme de croissance qui lui est associé bijectivement. On définit $j(\Delta)$ le nouveau diagramme de croissance obtenu à partir de Δ en gardant le bord de droite μ identique mais en substituant à la suite de partitions λ du haut de Δ sa transformée par le Jeu de Taquin : $\overline{jdt}(\lambda)$. (Rappelons qu'on a alors un unique diagramme de croissance qui est associé à cette nouvelle suite de partitions $(\overline{jdt}(\lambda), \mu)$, obtenu avec les règles B1 à B4 précédentes). Le nouveau remplissage du polyomino sera alors nommé $j(P)$.

Remarquons que j est donc une bijection car les procédés de constructions de diagramme de croissance et de Jeu de Taquin sur le bord sont bien entendu réversibles.

On a également la propriété suivante :

Proposition 8 Pour tout entier $k \geq 1$, la transformation j conserve les nombres maximaux d'unions de k chaînes Nord-Est de 1 du polyomino.

En effet, la partition libellant le coin supérieur droit étant identique dans Δ et dans $j(\Delta)$, la propriété s'en déduit du Théorème de Greene.

Si on prend comme exemple P le polyomino cité précédemment pour les diagrammes de croissances :

Soit Q le polyomino rectangulaire rempli, construit à partir de P en lui enlevant sa première colonne et soit λ' la suite de partitions du bord du haut du nouveau diagramme de croissance associé à Q .

Alors, on a $\lambda' = \overline{jdt}(\lambda)$.

4 Théorèmes de Rubey

Martin Rubey, dans [11] a montré deux théorèmes sur les moon polyominos qui énoncent que le nombre de remplissages de certains types de moon polyominos (où on impose certaines conditions) ne dépendent pas de l'ordre des colonnes, parfois seulement de la structure de ce polyomino.

Théorème 10

Soit P un moon polyomino. On suppose que P est rempli de telle sorte que :

- (i) La ligne L_i contient (en somme) m_i entrées
- (ii) $|ne| = k$
- (iii) $|SE| = l$

où les m_i , k et l sont des entiers donnés.

Alors, le nombre de tels remplissages ne dépend pas de l'ordre des colonnes (tant que le résultat reste un moon polyomino).

De plus, si on ne regarde pas la condition (i), le nombre de remplissages ne dépend que de la structure du moon polyomino.

Quelques variantes du théorème :

- On pourrait remplacer (simultanément) (ii) par $|NE| = k$ et (iii) par $|se| = l$

Egalement, mais uniquement dans le cas de 0-1-remplissages,

- On pourrait remplacer (simultanément) (ii) par $|nE| = k$ et (iii) par $|Se| = l$
- On pourrait remplacer (simultanément) (ii) par $|Ne| = k$ et (iii) par $|sE| = l$

Avant de prouver le théorème, rappelons la définition de la fonction j bijective que nous avons construit pour combiner les diagrammes de croissance et le Jeu de Taquin sur ceux-ci.

À un 0-1-polyomino rectangulaire P (si ce sont des entiers naturels quelconques, on l'élargit, comme vu précédemment, pour se ramener au cas des 0-1), on lui applique les règles F_1 à F_4 pour construire Δ son diagramme de croissance associé.

À ce diagramme de croissance, on ne garde que la suite de partitions sur le bord droit et on remplace celle du bord du haut par sa transformée par le Jeu de Taquin.

En appliquant les règles B_1 à B_4 , on obtient un nouveau diagramme de croissance du polyomino $j(\Delta)$ ainsi qu'un nouveau remplissage. Le polyomino rempli obtenu (si besoin rétréci s'il avait été élargi au début), noté $j(P)$.

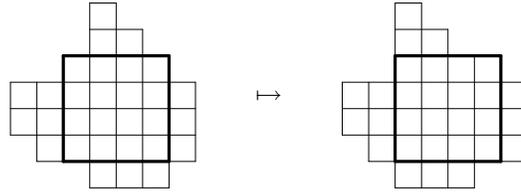
Il est important de noter que la transformation j préserve les longueurs des chaînes NE et se .

Preuve :

1ère étape : Tout d'abord, montrons que réordonner les colonnes ne change pas le nombre de remplissages.

Soient C et D deux colonnes de P , C contenue dans D , C à gauche de D .

On marque le plus grand rectangle contenu dans P de même hauteur que C . On place la première colonne du rectangle à la fin comme dans l'exemple suivant :

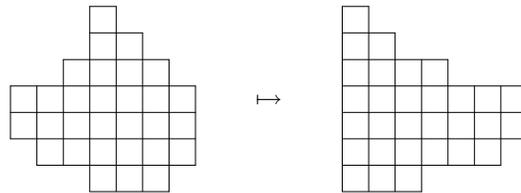


A présent, si on applique la transformation j au rectangle et si on laisse les autres entrées identiques, alors le nombre d'entrées de chaque ligne est resté le même et comme j préserve les NE chaînes, le résultat suit.

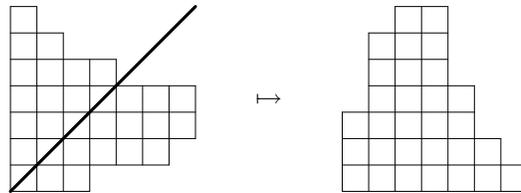
(Rappelons que les chaînes NE , se , ... doivent être contenues dans un rectangle !)

2ème étape : Nous avons vu qu'on peut donc échanger les colonnes de notre polyomino sans faire varier les nombres m_i , k , l . A présent, oublions les nombres m_i .

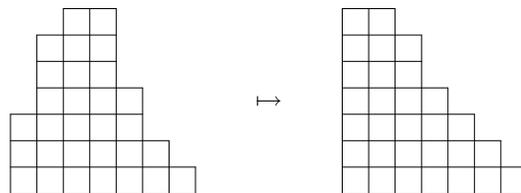
On peut échanger les colonnes de P comme précédemment, et les placer dans l'ordre décroissant (le polyomino reste bien moon car il est de libre intersection).



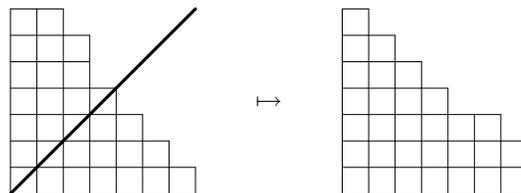
Puis, nous effectuons une symétrie par rapport à la diagonale $y = x$ pour obtenir une polyomino tas. Remarquons que cette transformation échange k et l (les chaînes NE devenant se et les se devenant NE).



A ce stade, nous pouvons donc réorganiser les colonnes sans changer les nombres k et l (qui sont toujours inversés l'un de l'autre). Réordonnons les pour les placer dans l'ordre décroissant.



Enfin, rétablissons l'ordre naturel entre k et l en effectuant à nouveau une symétrie par rapport à la diagonale $y = x$.



Nous obtenons ainsi un diagramme de Ferrers, avec les mêmes caractéristiques que le polyomino de départ : les nombres k et l ont été conservés tout au long du processus.

Ainsi, tout polyomino admettant $|ne| = k$ et $|SE| = l$ admet autant de remplissages que ce diagramme de Ferrers : le nombre de tels remplissages ne dépend que de la structure du polyomino, c'est-à-dire du diagramme de Ferrers obtenu par le processus précédent, ce qui démontre donc le théorème. □

Rubey a également démontré un autre théorème plus puissant qui énonce qu'on peut également oublier l'entier l du dernier théorème.

Théorème 11

Soit P un moon polyomino. On suppose que P est rempli par des 0 – 1 de telle sorte que :

- (i) La ligne L_i contient (en somme) m_i entrées
- (ii) $|ne| = k$

où les m_i et k sont des entiers donnés.

Alors, le nombre de tels remplissages ne dépend pas de l'ordre des colonnes (tant que le résultat reste un moon polyomino).

De plus, si on ne regarde pas la condition (i), le nombre de remplissages ne dépend que de la structure du moon polyomino.

A première vue, ce théorème semble presque identique au précédent, mais la preuve précédente ne peut pas s'appliquer car la transformation j que nous avons utilisé ne préserve pas le nombre d'entrées d'une taille donnée.

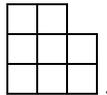
La preuve utilise la théorie des complexes simpliciaux ainsi que l'anneau de Stanley-Reisner et est présentée en annexe 2. Une preuve complètement bijective de ce théorème reste à ce jour encore ouverte.

De plus, à partir du théorème précédent, nous avons donc fixé $|ne|$ mais nous n'aurions pas pu fixer $|SE|$: le théorème ne marcherait pas alors, ceci même pour des polyominos tas. Bien que l'ensemble des 0-1-remplissages de plus longue chaîne Sud-Est au plus 1 est encore un complexe simplicial, il n'y a plus de bijection entre les monômes de l'anneau de Stanley-Reisner et les remplissages du moon polyomino satisfaisant les bonnes restrictions. En effet, les relations du théorème n'excluent pas que les chaînes contenant des entrées multiples, ce qui pose problème.

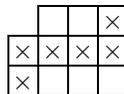
En effet, si on considère le remplissage suivant du polyomino tas :



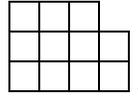
Sa plus longue chaîne Sud-Est est de longueur 3. Cependant, il n'y a pas de tel remplissage avec 7 entrées non nulles du polyomino tas :



De même, on ne peut pas conserver simultanément la longueur de la plus longue chaîne nord-est et de la plus longue chaîne sud-est, du moins pas si on persiste à vouloir conserver le nombre d'entrées dans chaque ligne. Par exemple,



est un remplissage tel que la plus longue chaîne nord-est est de longueur 2, et la plus longue chaîne sud-est est de longueur 1. Pourtant, il n'y a pas de tel remplissage du polyomino



5 Croisements et emboîtements des partitions de $[n]$

5.1 k -croisements et k -emboîtements

Ces résultats concernant le nombre de remplissages de polyominos ne sont pas sortis de nulle part et proviennent en réalité d'un problème posé par C. Krattenthaler dans [7]. En effet, ce dernier avait réussi à établir ces mêmes résultats d'une manière un peu moins générale en se contentant des diagrammes de Ferrers. C'est Rubey qui a donc confirmé ses conjectures en les élargissant quelque peu.

On peut alors se demander quelle était la source de ces questionnements, et comment ils sont arrivés à chercher des résultats dans ce sens. C'est pourquoi nous allons nous attarder un moment sur les partitions de $[n]$.

Rappelons bien entendu que $[n]$ désigne l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Ici, nous considérons des partitions de cet ensemble :

$$[n] = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \quad , \quad (A_i)_i \text{ 2 à 2 disjoints et non vides}$$

Chaque ensemble A_i étant un sous-ensemble de \mathbb{N} , on peut ordonner ses éléments et par convention, nous allons écrire les éléments de A_i comme paires de la manière suivante :

$$A_i = \{i_1, i_2, i_3, \dots, i_m\} = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{m-1}, i_m)\}$$

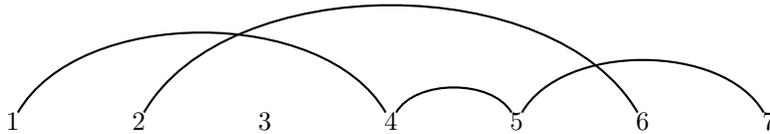
avec $i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_m$.

Ainsi, chaque partition de $[n]$ peut s'écrire de manière unique (à ordre près des éléments) comme ensemble de couples d'éléments de $[n]$. On prendra donc pour convention qu'un ensemble constitué d'un seul élément n'est alors pas représenté.

Par exemple, on a pour partition de $[7]$:

$$[7] = \{ \{1, 4, 5, 7\} , \{2, 6\} , \{3\} \} = \{(1, 4), (4, 5), (5, 7), (2, 6)\}$$

Naturellement, on peut alors représenter cette partition avec un graphe, où chaque paire de la partition (i, j) correspond alors à une arête du graphe, les sommets étant les éléments de l'ensemble $[n]$. Par exemple, la partition précédente de $[7]$ peut se représenter par :



On peut alors définir de manière graphique si une partition contient un croisement ou un emboîtement. Mais nous allons définir ces objets de manière formelle. Pour les définitions suivantes, on considère P une partition de $[n]$.

Définition 12 On définit un k -croisement de P comme un sous-ensemble $\{(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)\}$ de P tel que

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k < j_1 < j_2 < \dots < j_k$$

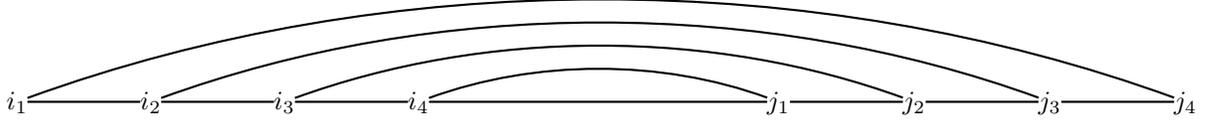
On note alors $\text{Cross}(P)$ le plus grand k tel que P contienne un k -croisement.



Définition 13 On définit un k -emboîtement de P comme un sous-ensemble $\{(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)\}$ de P tel que

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k < j_k < j_{k-1} < \dots < j_1$$

On note alors $\text{Nest}(P)$ le plus grand k tel que P contienne un k -emboîtement.



Théorème 14 Soit $n, s, t \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de partitions de $[n]$ telles que $\text{Cross}(P) = s$ et $\text{Nest}(P) = t$ est égal au nombre de partitions de $[n]$ telles que $\text{Cross}(P) = t$ et $\text{Nest}(P) = s$.

Preuve : On va en fait réaliser une bijection entre ces partitions et les 0-1-Ferrers instaurés dans les parties précédentes.

Soit P une partition de $[n]$. On peut l'écrire comme on a vu auparavant en ensemble de couples :

$$P = \{(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)\}$$

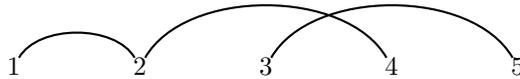
On va créer un diagramme de Ferrers en escalier comportant 5 lignes et 5 colonnes tel que les colonnes soient numérotées de bas en haut et les lignes de gauche à droite. Puis pour chaque (i_x, j_x) , on pose un 1 dans la case de la ligne L_{j_x} et de la colonne C_{i_x} .

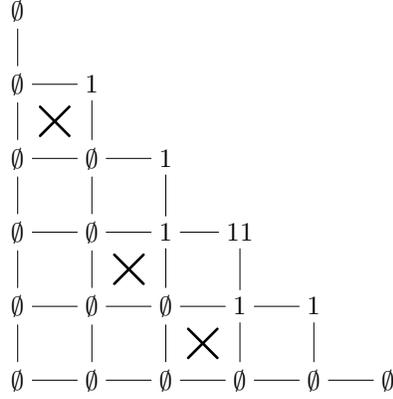
On a alors une bijection entre les partitions de $[n]$ et les tableaux de Ferrers qui ont au plus un 1 par ligne et par colonne.

De plus, un k -croisement correspond bijectivement à une chaîne Sud-Est et un k -emboîtement correspond à une chaîne Nord-Est. Le théorème suit alors grâce à cette bijection. □

Voyons un exemple de telle bijection :

$$P = \{(1, 2, 4), (3, 5)\} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 5)\}$$





Mais Krattenthaler va encore plus loin car le résultat reste en fait vrai en rajoutant des hypothèses. Avant d'énoncer ce deuxième théorème, donnons deux nouvelles définitions :

Définition 15 Pour une partition $P = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ où les $(A_i)_i$ sont 2 à 2 distincts, on définit les ensembles $\min(P)$ et $\max(P)$ par

$$\min(P) = \{\min(A_1), \min(A_2), \dots, \min(A_k)\}$$

$$\max(P) = \{\max(A_1), \max(A_2), \dots, \max(A_k)\}$$

En fait, on remarque que si on complète le théorème précédent en imposant que soient conservés les ensembles $\min(P)$ et $\max(P)$, le théorème est encore valable.

Théorème 16 Soit $n, s, t \in \mathbb{N}$ et soient S, T deux sous-ensembles de \mathbb{N} . Alors le nombre de partitions de $[n]$ telles que $\text{Cross}(P) = s$, $\text{Nest}(P) = t$, $\min(P) = S$ et $\max(P) = T$ est égal au nombre de partitions de $[n]$ telles que $\text{Cross}(P) = t$, $\text{Nest}(P) = s$, $\min(P) = S$ et $\max(P) = T$.

Preuve : D'après la preuve du théorème précédent, on a une bijection entre les partitions de $[n]$ et les 0-1-Ferrers, mais également avec les tableaux oscillants qui lui sont associés, c'est-à-dire les suites de partitions commençant et finissant par \emptyset , dont les termes ne varient que d'une case au plus.

D'après le théorème précédent, il suffit de montrer que $\min(P)$ et $\max(P)$ sont invariants par conjugaison.

Supposons que $\{i_1, \dots, i_k\}$ soit un bloc de la partition P . Alors d'après notre bijection, on va mettre 1 dans (C_{i_1}, L_{i_2}) , dans (C_{i_2}, L_{i_3}) , \dots , et dans $(C_{i_{k-1}}, L_{i_k})$. On remarque donc qu'il n'y a pas de 1 dans la ligne L_{i_1} et dans la colonne C_{i_k} .

Ainsi l'absence de 1 dans la ligne L_{i_1} entraîne que les partitions λ_{2i_1-2} et λ_{2i_1-1} à droite de la ligne L_{i_1} sont égales et incluses strictement dans la partition λ_{2i_1} .

De même l'absence de 1 dans la ligne C_{i_k} entraîne que les partitions λ_{2i_k-2} et λ_{2i_k-1} en haut de la colonne C_{i_k} sont égales et contiennent strictement la partition λ_{2i_k} .

Alors $\min(P)$ et $\max(P)$ sont clairement définis par les sous-suites $(\lambda_{i-2}, \lambda_{i-1}, \lambda_i)$ de P , selon leurs liens avec la relation \subset .

Par conjugaison, ces suites sont invariantes (leur lien pour \subset en tout cas) d'où on peut appliquer la bijection du théorème précédent et le résultat suit directement.

Ces résultats énoncés par Krattenthaler dans [7] sont en fait des théorèmes énoncés un an plus tôt par l'article [2], mais d'une manière tout à fait différente. Krattenthaler a donc retrouvé ces mêmes résultats par une méthode tout à fait différente faisant appel aux diagrammes de croissance, des résultats qui auront été améliorés enfin par Rubey [11].

Une autre application intéressante étudiée au premier abord par [2] est l'idée du problème inverse : absence de croisement et d'emboîtement dans une partition de $[n]$, cette étude a été approfondie par Anna De Mier dans [3] entre autre grâce aux résultats de Rubey.

5.2 Graphes k -non-croisés et k -non-emboîtés sur $[n]$

Le problème des k -non-croisements et des k -non-emboîtements, étudié par Anna de Mier dans [3] a été présenté tout à fait différemment, car il repose en grande partie sur la théorie des graphes.

Dans toute la suite, nous allons donc considérer des graphes sur $[n]$, supposés sans boucles, en autorisant la possibilité d'avoir plusieurs arêtes entre deux sommets différents.

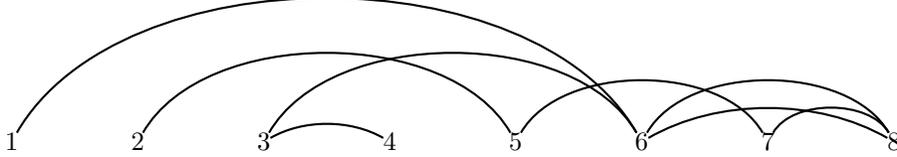


Figure 11: Un graphe sans boucle sur $[8]$

Nous allons définir à présent les k -croisements et les k -emboîtements pour les graphes sur $[n]$, ce qui est analogue aux mêmes définitions pour les partitions sur $[n]$.

Définition 17 Soit G un graphe sans boucle sur $[n]$.

On appelle k -croisement de G tout ensemble de k arêtes $(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)$ telles que

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k < j_1 < j_2 < \dots < j_k$$

On appelle k -emboîtement de G tout ensemble de k arêtes $(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)$ telles que

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k < j_k < j_{k-1} < \dots < j_1$$

Définition 18 Soit G un graphe sans boucle sur $[n]$.

G est dit k -non-croisé s'il ne contient aucun k -croisement. Le plus grand k tel que G ait un k -croisement est noté $Cross(G)$.

G est dit k -non-emboîté s'il ne contient aucun k -emboîtement. Le plus grand k tel que G ait un k -emboîtement est noté $Nest(G)$.

On va créer une bijection entre ces graphes et des diagrammes de Ferrers remplis par des entiers naturels quelconques. Pour cela, à chaque graphe G sur $[n]$, nous allons associer un diagramme de Ferrers $\Delta(G)$ en escalier comportant $n-1$ lignes et colonnes, où on numérote les colonnes de 1 à $n-1$ de gauche à droite et les lignes de 2 à n de haut en bas. Alors, s'il existe un nombre x d'arêtes entre i et j , on posera le nombre x dans la case du diagramme située en ligne L_{n-j+1} et en colonne C_i . Par exemple, le graphe présenté en figure 11 sera associé au diagramme de Ferrers de la figure 12

Nous pouvons faire directement les relations suivantes : G contient un k -croisement si et seulement si $\Delta(G)$ contient une chaîne Sud-Est de longueur k . De même G contient un k -emboîtement si et seulement si $\Delta(G)$ contient une chaîne Nord-Est de longueur k .

Le théorème suivant, toujours énoncé par Krattenthaler dans [7] donne un premier résultat sur les graphes k -non-emboîtés et k -non-croisés.

Théorème 19 Pour tout diagramme de Ferrers F et tout entier m fixé, on considère tous les remplissages de F tels que la somme de ses entrées soit égale à m . Alors pour tout $k < 1$,

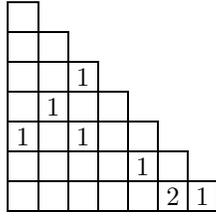


Figure 12: $\Delta(G)$ associé au graphe sur [8]

le nombre de tels remplissages qui ne contiennent pas de chaîne Sud-Est de longueur k est égal au nombre de tels remplissages qui ne contiennent pas de chaîne Nord-Est de longueur k .

Ainsi en se restreignant aux diagrammes de Ferrers triangulaires, nous obtenons immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 20 *Le nombre de graphes k -non-croisés sur $[n]$ possédant m arêtes est égal au nombre de graphes k -non-empoîtés sur $[n]$ possédant m arêtes.*

En fait, on peut même renforcer ce résultat en introduisant de nouvelles notions de k -croisements faibles et k -empoîtements faibles.

Définition 21 *Soit G un graphe sans boucle sur $[n]$.*

On appelle k -croisement faible de G tout ensemble de k arêtes $(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)$ telles que

$$i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k < j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k$$

On note $Cross^(G)$ le plus grand k tel que G ait un k -croisement faible.*

On appelle k -empoîtement faible de G tout ensemble de k arêtes $(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)$ telles que

$$i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k < j_k \leq j_{k-1} \leq \dots \leq j_1$$

On note $Nest^(G)$ le plus grand k tel que G ait un k -nesting.*

Alors la version complète du théorème précédent est la suivante :

Corollaire 22 *Soient n, m, r et s des entiers naturels quelconques.*

Le nombre de graphes ayant n sommets et m arêtes tels que $Cross(G) = r$ et $Nest^(G) = s$ est égal au nombre de graphes ayant n sommets et m arêtes tels que $Cross^*(G) = s$ et $Nest(G) = r$.*

Définition 23 *Soit G un graphe sans boucle défini sur $[n]$. On définit la suite des degrés G/D de G comme la donnée de $U = (l_i, r_i)_{i=1..n}$, où pour chaque i , l_i correspond au nombre d'arêtes partant de i vers des entiers $x < i$, et r_i correspond au nombre d'arêtes partant de i vers des entiers $x > i$.*

Remarquons qu'en terme de théorie des graphes, le degré de chaque i est égal à $l_i + r_i$.

Nous donnons la caractérisation suivante des suites de degrés G/D sur des graphes sur $[n]$ afin de pouvoir les distinguer totalement :

Proposition 24 $U = (l_i, r_i)_{i=1 \dots n}$ est une suite de degrés G/D d'un graphe G si et seulement si

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^r r_i \\ \forall k = 1 \dots n, \sum_{i=1}^k l_i \leq \sum_{i=1}^{k-1} r_i \end{cases}$$

Nous avons ainsi une définition valable des *suites de degrés G/D* comme étant les suites de n couples (l_i, r_i) vérifiant les deux conditions précédentes.

Anna De Mier a alors montré [3] le théorème suivant, plus restrictif que les précédents mais qui est donc encore valable :

Théorème 25 Soit U une suite de degrés G/D . Alors le nombre de graphes G k -non-croisés sur $[n]$ ayant pour suite de degrés G/D la suite U est égal au nombre de graphes G k -non-emboîtés sur $[n]$ ayant pour suite de degrés G/D la suite U .

Une remarque importante que nous devons faire est qu'il est nécessaire de pouvoir autoriser plusieurs arêtes possibles entre les éléments de $[n]$ dans les graphes. En effet, si on se restreint aux *graphes simples* (i.e. les graphes n'ayant pas plus d'une arête entre deux sommets distincts donnés), le théorème précédent est faux. Un exemple est le suivant.

$$U = (0, 2), (0, 2), (1, 1), (2, 0), (2, 0)$$

Pour cette suite de degrés G/D (elle vérifie en effet les deux conditions données dans la définition), il existe bien un graphe simple non-emboîté mais aucun graphe simple non-croisé.

Avant d'attaquer la preuve du théorème précédent, il nous faut poser quelques notations et définitions.

Définition 26 Soit i un entier de $\{1, 2, \dots, n\}$.

i est une ouverture si $l_i = 0$ (on aura alors $(l_i, r_i) = (0, r_i)$).

i est une fermeture si $r_i = 0$ (on aura alors $(l_i, r_i) = (l_i, 0)$).

Ces définitions nous permettront, quitte à rajouter des sommets, de se ramener uniquement à des ouvertures et fermetures, ce qui pourra nous être utile par la suite.

Lemme 27 Pour tout entier i de $[n]$, il y a autant de graphes G sur $(l_1, r_1), \dots, (l_i, r_i), \dots, (l_n, r_n)$ que de graphes G sur $(l_1, r_1), \dots, (l_i, 0), (0, r_i), \dots, (l_n, r_n)$.

Introduisons alors quelques notations.

$F(G)$ (respectivement $O(G)$) va désigner l'ensemble des fermetures (resp. ouvertures) du graphe G .

$$F(G) = \{i_1, \dots, i_f\} \quad , \quad O(G) = \{j_1, \dots, j_o\}$$

On va noter pour toute fermeture i , $p(i)$ le nombre de possibilités d'ouvertures pour j :

$$\forall i \in F(G) \quad , \quad p(i) = \text{Card} \{j < i / j \in O(G)\}$$

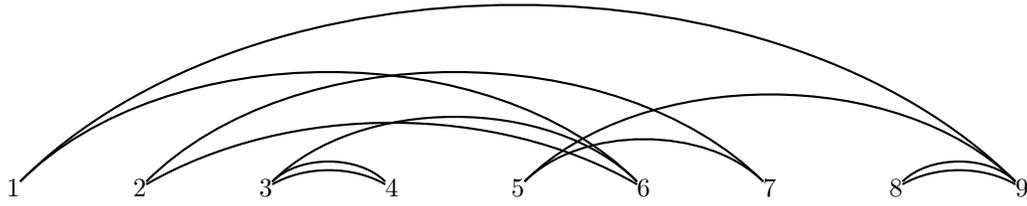
A présent pour G donné, nous construisons un diagramme de Ferrers $T(G)$ de taille $(p(i_f), p(i_{f-1}), \dots, p(i_1))$ et si d arêtes relient j_s à i_r , on mettra alors un d dans la case de la ligne L_{f-s+1} et de la colonne C_s .

Par construction, on a alors les deux relations suivantes:

$$\sum_{d \in L_i} d = l_i \quad , \quad \sum_{d \in C_j} d = r_j$$

Nous pouvons apprécier qu'encore une fois, la présence de k -croisements (resp. k -emboîtements) dans G correspond à la présence de suites Sud-Est (resp. Nord-Est) dans $T(G)$.

Un exemple est le suivant :



$$O(G) = \{1, 2, 3, 5, 8\}$$

$$F(G) = \{4, 6, 7, 9\}$$

$$T(G) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 2 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & \\ \hline & 1 & & 1 \\ \hline 1 & & & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Ici $T(G)$ a pour sommes de lignes 4, 2, 3, 2 et sommes de colonnes 2, 2, 3, 2, 2.

On a donc à notre disposition une bijection entre les graphes G/D et les remplissages de diagrammes de Ferrers, qui permet donc par ailleurs de retrouver la suite de degrés G/D grâce à la taille et au remplissage de notre diagramme de Ferrers.

Définition 28 On appelle diagramme à sommes L/C prescrites tout diagramme muni de deux suites $(\rho_i)_i$ et $(\gamma_j)_j$ d'entiers naturels telles que les seuls remplissages autorisés pour ce diagramme soient ceux tels que les sommes en lignes et colonnes correspondent aux suites (ρ_i) et (γ_j) .

Théorème 29 Pour tous les diagrammes T à sommes L/C prescrites, le nombre de remplissage de T évitant des k -chaînes Sud-Est est égal au nombre de remplissage de T évitant des k -chaînes Nord-Est.

Ce théorème de Anna de Mier [3] complète les travaux de Chen, Deng, Du et Stanley [2]. Ces derniers ont quand même développé de nombreux résultats que nous allons détailler dans la partie suivante.

5.3 Une bijection avec des chemins dans le plan et l'espace

L'idée de Chen, Deng, Du et Stanley était d'établir une bijection entre les partitions k -croisés ou k -emboîtés avec des objets combinatoires bien connus, dont on pourrait extraire une formule énumérative explicite.

Un exemple très simple [9] est que le nombre de couplages de $[2n]$ (c'est-à-dire une partition de $[2n]$ sous forme de n couples) n'ayant pas de croisement est égal au nombre de couplages de $[2n]$ n'ayant pas d'emboîtement, et ce nombre est égal en particulier au n -ième nombre de Catalan C_n :

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Pourrait-on faire la même chose avec des 2-croisements, 2-emboîtements, et plus généralement k -croisements et k -emboîtements ? Et parallèlement, peut-on raisonnablement trouver une signification bijective pour les graphes k -non-croisés ou k -non-emboîtés ?

Les auteurs de [2] ont donné le théorème suivant qui illustre une première approche du problème d'énumération des couplages non-croisés.

Théorème 30 *Supposons \mathbb{R}^{k-1} muni d'une base $(e_i)_{i=1\dots k-1}$. Alors le nombre de partitions de $[n]$ k -non-croisées est égal au nombre de chemins fermés dans la région*

$$V_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}), a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{k-1} \geq 0, a_i \in \mathbb{Z}\}$$

partant et arrivant en l'origine, de longueur $2n$, de pas $\pm e_i$ ou $(0, \dots, 0)$, avec la propriété que notre chemin "recule" (avec un pas $-e_i$) ou stagne (avec un pas de 0) après un nombre pair de pas, et à l'inverse qu'il "avance" (avec un pas $+e_i$) ou stagne après un nombre impair de pas.

Ce théorème a été obtenu en mettant en place une bijection entre les partitions et tableaux vascillants, une bijection explicitée en Annexe 3. Les auteurs se sont intéressés plus particulièrement non pas aux partitions de $[n]$ en général mais plutôt aux couplages de $[n]$. Le corollaire suivant est donc le plus utilisé par la suite.

Corollaire 31 *Le nombre de couplages k -croisés de $[2m]$ est égal au nombre de chemins fermés de longueur $2m$ de l'ensemble*

$$V_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}), a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{k-1} \geq 0, a_i \in \mathbb{Z}\}$$

partant et arrivant en l'origine, de pas unitaires dans n'importe quelle direction de la base choisie de \mathbb{R}^{k-1} , ou dans leur direction opposée.

Le corollaire précédent restreint aux cas $k = 2$ ou $k = 3$ permet alors de définir de belles correspondances combinatoires.

Définition 32 *Un chemin de Dyck de longueur $2m$ est un chemin dans le plan quadrillé \mathbb{Z}^2 , allant de l'origine $(0,0)$ au point $(2m, 0)$, de pas $(1, 1)$ ou $(1, -1)$, qui ne passe jamais en dessous de l'axe des abscisses.*

Une paire (P, Q) de chemins de Dyck est dite non-croisée s'ils ont même origine et même destination, que P n'est jamais situé en dessous de Q .

Proposition 33

1. *L'ensemble des 2-couplages non-croisés est en bijection avec l'ensemble des chemins de Dyck.*
2. *L'ensemble des 3-couplages non-croisés est en bijection avec l'ensemble des paires non-croisées de chemins de Dyck.*

Preuve : D'après le corollaire précédent, les 2-couplages non-croisés sont en bijection avec les chemins fermés $V = (x_i)_{i=0\dots 2m}$ avec $x_0 = x_{2m} = 0$, $x_i \geq 0$ et $x_{i+1} - x_i = \pm 1$. Ce chemin est uni-dimensionnel, on en définit un autre dans le plan en posant

$$P = \{(i, x_i) / i = 0, 1, \dots, 2m\}$$

. Alors P est bien un chemin de Dyck et la bijection correspondante est donc donnée.

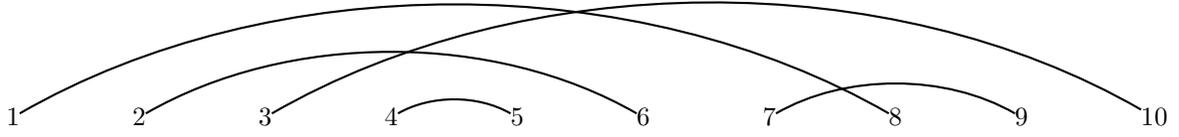
Pour $k = 3$, les 3-couplages non-croisés sont en bijection avec des chemins du plan $V = (x_i, y_i)_{i=0\dots 2m}$ avec $(x_0, y_0) = (x_{2m}, y_{2m}) = (0, 0)$, $x_i \geq y_i \geq 0$ et $(x_{i+1}, y_{i+1}) - (x_i, y_i) = (\pm 1, 0)$ ou $(0, \pm 1)$. Etant donné un tel chemin, on peut très bien définir dans le plan 2 chemins en posant

$$P = \{(i, x_i + y_i) / i = 0, 1, \dots, 2m\}$$

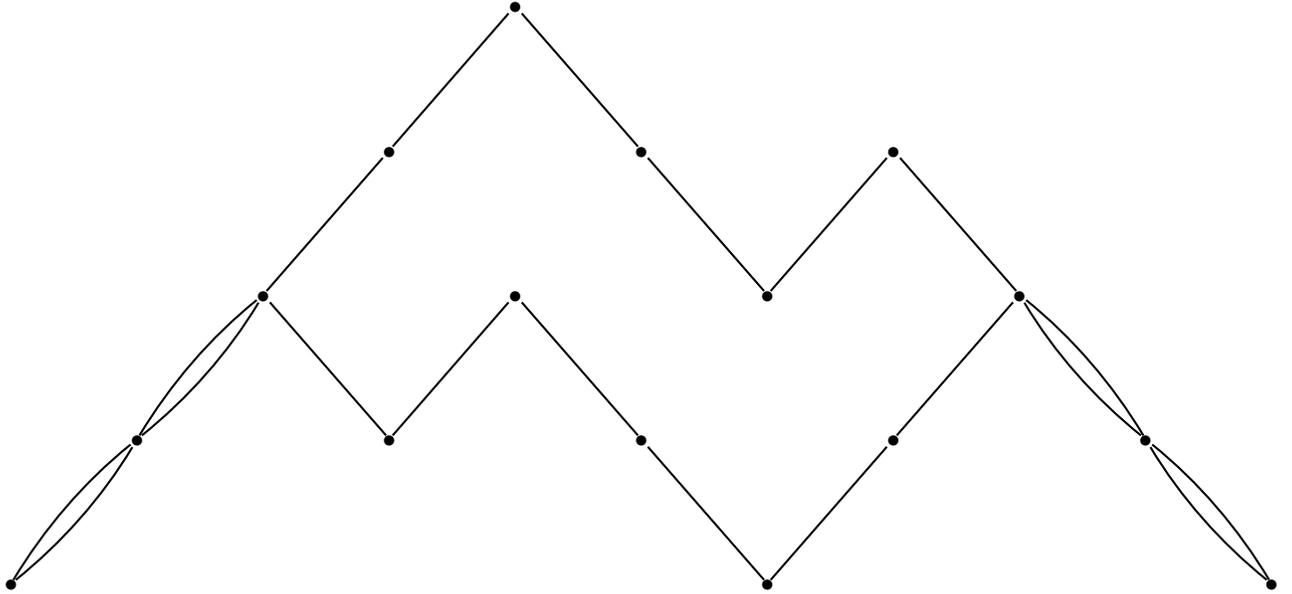
$$Q = \{(i, x_i - y_i) / i = 0, 1, \dots, 2m\}$$

Alors, par construction (P, Q) sera une paire non-croisée de chemins de Dyck et on peut voir facilement que c'est bien une bijection.

Un exemple de bijection : Voici un couplage de $[10]$.



Voici alors le couple de chemins de Dyck correspondant :



Dénommons à présent $f_k(m)$ le nombre de k -couplages non-croisés de $[2m]$. Toujours d'après le corollaire, c'est également le nombre de chemins de longueur $2m$ dans la région V_k partant et arrivant en l'origine avec pour pas $\{\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_{k-1}\}$. Posons alors $F_k(x)$ la série génératrice des $f_k(m)$ en faisant varier le m .

$$F_k(x) = \sum_{m \geq 1} f_k(m) \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

Grabiner et Magyar ont déterminé une formule déterminantale pour $F_k(x)$:

$$F_k(x) = \det [I_{i-j}(2x) - I_{i+j}(2x)]_{i,j=1 \dots k-1}$$

avec $I_m(2x)$ la fonction hyperbolique de Bessel de première espère d'ordre m , donnée par

$$I_m(2x) = \sum_{j \geq 0} \frac{x^{m+2j}}{j!(m+j)!}$$

En particulierisant pour le cas $k = 2$, on pourrait retrouver la formule suivante :

$$F_2(x) = I_0(2x) - I_2(2x) = \sum_{j \geq 0} C_j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

où C_j désigne le j -ième Nombre de Catalan : on retrouve donc bien la formule donnée précédemment.

D'après une formule sur le nombre de paires non-croisées de chemins de Dyck, due aux travaux de Gouyou-Beauchamps, on peut trouver dans le cas $k = 3$ que

$$f_3(m) = \frac{3!(2m+2)!}{m!(m+1)!(m+2)!(m+3)!} = C_m C_{m+2} - C_{m+1}^2$$

Nous pouvons donc grâce à des bijections obtenir quelques formules closes pour les petites valeurs de k et ainsi obtenir quelques résultats numériques pour le nombre de graphes k -non-croisés. Cependant même pour des petites valeurs, cela n'a pas encore été traité de manière générale pour k quelconque. En effet, dans certains cas, des bijections n'ont pas encore été relevées, ou bien l'expression des résultats nécessiterait des calculs très lourds et des formules déterminantales qui n'ont pas été simplifiées jusqu'à présent. Il reste donc encore à faire dans la recherche de significations des k -croisements ou k -emboitements avant de pouvoir les énumérer parfaitement. Peut-être les études liés aux tableaux de permutation permettront de faire ce lien si on parvient à mettre en évidence un lien entre les deux travaux de recherche.

6 Conclusion

Nous avons à présent énoncé les principaux résultats connus concernant les suites croissantes et décroissantes présentes dans les remplissages des polyominos. On voit bien que ce problème peut se poser de manière équivalente en passant par d'autres aspects combinatoires, comme les k -croisements ou k -emboitements.

L'article de Chen, Deng, Du, Stanley et Yan [2] a été le précurseur dans ce sens, et a permis aux autres auteurs de faire le lien avec les polyominos et de nombreux résultats ont donc été obtenus par la suite. A présent, il paraît difficile d'obtenir des résultats plus généraux que ceux obtenus par Rubey : les moon polyominos semblent être le type le cas le plus général à traiter. Cependant, des travaux sont en cours en ce qui concerne les k -croisements (ou k -non-croisements) et de même pour les k -emboitements (ou k -non-emboitements), où de possibles ouvertures sont toujours possibles.

Krattenthaler semble penser que ce sujet aurait un lien plus ou moins fort avec le travail fait par d'autres équipes sur les tableaux de permutations car des similitudes apparaissent mais personne n'a encore mis en évidence ce fameux big picture.

L'expérience de ce stage de recherche m'a permis en tout cas de m'initier à ce qu'est un véritable travail de recherche dans un laboratoire. Je remercie chaleureusement pour cela mon professeur J. Zeng qui m'a généreusement accueilli au sein de son équipe et de son groupe de travail avec R.Biagioli et F.Jouhet. Il m'a fait connaître les séminaires de recherche de l'Institut Camille Jordan, ainsi que l'enthousiasme lié aux conférences mathématiques comme le Séminaire Lotharingien auquel j'ai pu assister. Le fait de rencontrer les auteurs des articles étudiés, C.Krattenthaler ou M.Rubey, a été très enrichissant et je lui en suis donc très reconnaissant. Ce travail a ainsi été dans son intégralité d'un grand intérêt et il me sera donc nécessairement profitable dans la poursuite de mon cursus et de ma future carrière.

7 Annexe 1 : Les diagrammes de croissance généralisés

Les définitions des diagrammes de croissance vues au début de ce mémoire se rapportaient soit à des polyominos rectangulaires, soit à des diagrammes de Ferrers. Nous allons à présent généraliser quelque peu ces notions pour permettre une définition se rapportant aux polyominos tas.

Prenons donc un polyominos tas quelconque, et nous allons chercher à libeller chaque coin, cette fois non plus avec une partition, mais avec deux. Chaque coin sera donc étiqueté de :

- une *partition supérieure* donnée en appliquant le Théorème de Greene à la région rectangulaire en bas à gauche du coin aussi large que la ligne juste au-dessus du coin étudié.
- une *partition inférieure* donnée en appliquant le Théorème de Greene à la région rectangulaire en bas à gauche du coin aussi large que la ligne juste en-dessous du coin étudié.

Dans le cas particulier où les lignes du dessus et en dessous du coin soient de même taille, les partitions inférieures et supérieures seront alors égales. Dans ce cas, nous ne mettrons donc qu'une seule partition. En particulier, c'est le cas d'un diagramme de Ferrers et la définition coïncide donc avec celle donnée précédemment. Un exemple de diagramme de croissance généralisé est donné par la figure 13

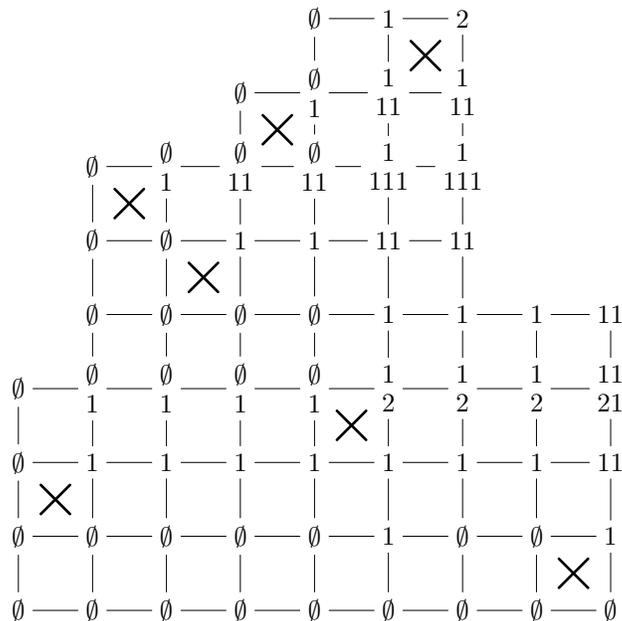


Figure 13: Un diagramme de croissance généralisé

De manière similaire aux polyominos rectangulaires, nous avons la proposition suivante.

Proposition 34 *La suite de partitions le long du bord du diagramme de croissance généralisé détermine entièrement le remplissage du diagramme en entier.*

Preuve : En effet, supposons que nous ayons reconstruit le diagramme de croissance jusqu'à la i -ème ligne, y compris la suite de partitions supérieures tout au long du bas de cette même ligne. Si cette ligne commence dans la même colonne, les partitions supérieures et inférieures coïncident et nous n'avons qu'à utiliser les règles usuelles $B1$ à $B4$ pour obtenir les étiquettes de la ligne et la suite de partitions supérieures qui labellent ses coins inférieurs. Sinon, il est nécessaire de reconstruire la suite de partitions inférieures en commençant à étiqueter le bas de la i -ième ligne.

8 Annexe 2 : Notions sur les complexes simpliciaux

Un *complexe simplicial* K est un couple (S, R) où S est un ensemble fini de sommets et R un sous-ensemble de l'ensemble des parties de S ($R \subset \mathcal{P}(S)$), clos par intersection (si a et b sont deux éléments de R , alors $a \cap b$ l'est aussi). Les éléments de R autres que l'ensemble vide sont appelés les *simplexes* de K .

La *dimension* d'un simplexe est simplement son cardinal moins 1 ; un n -simplexe est un simplexe de dimension n . La *dimension* d'un complexe est la plus grande dimension des simplexes qui le constituent. Un complexe est *pur* si toutes ses faces maximales ont la même dimension.

x est un *point cône* si pour tout $\sigma \in \Sigma$, $\sigma \cup \{x\} \subset \Sigma$.

Un simplexe peut être vu comme un polyèdre prenant appui sur des sommets. Un simplexe de dimension 0 est un sommet dans un espace abstrait, un simplexe de dimension 1 est une arête s'appuyant sur deux sommets (ces deux sommets eux-mêmes font également partie du simplexe), un simplexe de dimension 2 est une face triangulaire qui s'appuie sur trois arêtes et trois sommets (ces arêtes et sommets sont des simplexes, des parties appartenant au simplexe-face).

Les sommets d'un graphe sont des simplexes de dimension 0 et les arêtes des simplexes de dimension 1. De plus, les intersections entre arêtes sont bien des simplexes, le graphe en entier est donc un complexe simplicial. La dimension de ce complexe est celle du plus grand simplexe qu'il contient c'est-à-dire 1 aussi.

Les complexes simpliciaux dans les polyominos

On prend $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ un polyomino tas.

On pose $\Delta_{\Lambda, k}$ le complexe simplicial défini par

$$\Delta_{\Lambda, k} = \{\sigma \in \Lambda / \sigma \text{ ne contient pas de chaîne } (k-1)\text{-Nord-Est dans } \Lambda\}$$

On pose $\Gamma_{\Lambda, k}$ le *coin* de Λ :

$$\Gamma_{\Lambda, k} = \{(i, j) \in \Lambda / (i, j) \in \{1, \dots, k\} \times \{n-k+i, \dots, n\}\}$$

On remarquera que tous les éléments du coin de Λ sont des points cônes de $\Delta_{\Lambda, k}$.

On notera $Cone_{\Lambda, k}$ l'ensemble des points cônes de Λ . Les définitions de chaînes *NE* dans Λ signifient bien entendu que la chaîne est incluse dans un rectangle inclus complètement dans Λ .

Théorème 35 Soit $k \geq 1$ et soit Λ un polyomino tas à n colonnes et de structure $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Alors $\Delta_{\Lambda, k}$ est pur, de dimension

$$d_{\mu, k} = \sum_{i=1}^k \mu_i + \sum_{i=k+1}^n \min(\mu_i, k) - 1$$

Soit $\mathcal{M}_{\Lambda, k}$ la famille des faces maximales de $\Delta_{\Lambda, k}$.

Théorème 36 Soit $k \geq 1$ and soit Λ et Λ' deux polyominos tas de même structure. Alors

$$|\mathcal{M}_{\Lambda, k}| = |\mathcal{M}_{\Lambda', k}|$$

Nous allons à présent énoncer la preuve du théorème 11. Elle nécessite de connaissances sur les complexes simpliciaux et sur l'anneau de Stanley-Reisner.

Preuve : On considère donc Δ le complexe simplicial de tous les moon-polyomino remplis par des 0-1, ayant au plus m_i entrées non nulles en ligne i et de plus longue chaîne Nord-Est de longueur inférieure ou égale à k .

L'anneau de Stanley-Reisner de Δ est l'anneau polynomial ayant pour variables les x_{ij} pour chaque (i, j) du moon-polyomino, modulo les relations

$$\{x_{i_0 j_0} x_{i_2 j_2} \dots x_{i_k j_k} = 0 \mid (i_0, j_0), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k) \text{ chaîne Nord-Est dans } \Delta \}$$

Ainsi, il y a une bijection évidente entre les monômes de cet anneau et les remplissages du moon polyomino satisfaisant les conditions du théorème.

De la même manière, on peut considérer le complexe simplicial Δ' de tous les remplissages par 0-1 du moon polyomino transformé, ayant au plus m_i entrées non nulles en ligne i et de plus longue chaîne Nord-Est de longueur inférieure ou égale à k .

Or, le nombre de monômes d'un degré donné dans l'anneau de Stanley-Reisner correspondant à Δ est égal au nombre de monôme du même degré dans l'anneau de Stanley-Reisner correspondant à Δ' . Ceci dit, les fonctions de Hilbert des deux anneaux doivent être les mêmes. Ainsi, les complexes simpliciaux correspondants doivent avoir le même f -vecteur, ce qui est équivalent à l'affirmation du théorème.

9 Annexe 3 : Une bijection entre partitions de $[n]$ et tableaux vascillants

Dans la section 5.3 de ce mémoire, nous avons utilisé une bijection entre les ensembles de partitions et les tableaux vascillants. Cette relation est explicitée en détail dans l'article de Chen, Deng, Du, Stanley et Yan [2]. Nous allons donc la décrire un peu plus en détail ici.

Définition 37 *Un tableau vascillant V_λ^{2n} de forme λ et de longueur $2n$ est une suite de partitions d'entiers $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ telle que :*

1. $\lambda_0 = \emptyset$, et $\lambda_{2n} = \lambda$.
2. λ_{2i+1} est obtenue à partir de λ_{2i} en ne faisant rien ou en enlevant une case.
3. λ_{2i} est obtenue à partir de λ_{2i-1} en ne faisant rien ou en ajoutant une case.

Quelques exemples : un tableau vascillant de forme 11 et de longueur 10 peut être le suivant

$$\emptyset, \emptyset, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 21, 11, 11.$$

Nous allons à présent décrire la bijection qui nous intéresse.
Donnons nous un tableau vascillant

$$V = (\emptyset = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n} = \lambda)$$

On va définir une suite $(P_0, T_0), (P_1, T_1), \dots, (P_{2n}, T_{2n})$ où P_i est un ensemble de paires d'entiers dans $[n]$ et T_i est un Tableau de Young Standard de forme λ_i .

On pose P_0 l'ensemble vide \emptyset , et on pose T_0 égal au Tableau de Young Standard vide. Puis par récurrence, on construit les autres P_i et T_i :

1. Si $\lambda_i = \lambda_{i-1}$, alors $(P_i, T_i) = (P_{i-1}, T_{i-1})$.
2. Si $\lambda_i \supset \lambda_{i-1}$, alors il existe un $k \in 1, \dots, n$ tel que $i = 2k$. Dans ce cas, on pose $P_i = P_{i-1}$ et T_i est obtenu à partir de T_{i-1} en ajoutant l'entier k dans la case $\lambda_i \setminus \lambda_{i-1}$.
3. Si $\lambda_i \subset \lambda_{i-1}$, alors il existe un $k \in 1, \dots, n$ tel que $i = 2k - 1$. Dans ce cas, on pose T_i l'unique Tableau de Young Standard de taille λ_i telle que T_{i-1} soit obtenu à partir de T_i en insérant par ligne un nombre j . Ce j doit alors être inférieur à k . P_i est obtenu à partir de P_{i-1} en ajoutant la paire (j, k) .

Remarquons que par construction, on a $P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots \subseteq P_{2n}$. Par ailleurs tout entier i apparaît au plus une fois comme premier élément d'une paire de P_{2n} et au plus une fois comme deuxième élément d'une paire de P_{2n} .

On posera alors $\psi(V) = (P, T_{2n})$ où P est la partition de $[n]$ dont la représentation standard (en couples) est P_{2n} .

Remarquons également que si un entier i apparaît dans T_{2n} , alors P_{2n} ne peut pas contenir de paire (i, j) avec $i < j$. Il s'ensuit ainsi que i est l'élément maximal du bloc qui le contient. Le contenu du tableau T_{2n} est donc un sous-ensemble de $\max(P)$.

Voyons un exemple pour comprendre plus clairement l'application ψ .

Posons

$$V = \emptyset, \emptyset, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 21, 21, 211, 21, 21, 11, 21$$

Alors, les paires (B_i, T_i) (où B_i est la paire ajoutée à P_{i-1} pour obtenir P_i) sont données par le tableau suivant :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
T_i	\emptyset	\emptyset	1	1	12	12	12	12	12	12	12	14	14	1	17
B_i									4	4	4	5	5	(2, 6)	(4, 7)

Ainsi, dans ce cas,

$$T = \begin{matrix} 1 & 7 \\ 5 \end{matrix} \quad \text{et} \quad P = \{1\} \cup \{2, 6\} \cup \{3\} \cup \{4, 7\} \cup \{5\}$$

L'application ψ est bien bijective car le processus est totalement réversible.

Donnons nous un couple (P, T) où P est une partition de $[n]$ (on notera sa représentation standard $E(P)$), et T est un tableau de Young standard dont les entrées sont des éléments maximaux de leur bloc dans P , et $T_{2n} = T$. On va faire le chemin inverse, en partant de T_{2n} et reconstruire les tableaux précédents, et ainsi la suite de formes de partitions V .

Supposons que nous ayons reconstruit le tableau de Young standard T_{2k} pour un certain $k \geq n$, on peut alors obtenir les deux tableaux T_{2k-1} et T_{2k-2} par les règles suivantes :

1. $T_{2k-1} = T_{2k}$ si l'entier k n'apparaît pas dans T_{2k} . Sinon T_{2k-1} est obtenu à partir de T_{2k} en enlevant la case contenant k .
2. $T_{2k-2} = T_{2k-1}$ si $E(P)$ ne contient pas d'arête de la forme (i, k) . Sinon, il existe un unique $i < k$ tel que $(i, k) \in E(P)$. Dans ce cas, on pose T_{2k-2} le tableau obtenu à partir de T_{2k-1} en insérant i par ligne.

Contents

1	Introduction	1
2	Quelques outils préalables	1
2.1	Les polyominos	1
2.2	Suites croissantes et décroissantes dans les polyominos	2
3	Diagrammes de croissance et jeu de Taquin	3
3.1	Diagramme de croissance	3
3.2	Jeu de Taquin sur les diagrammes de croissance	8
4	Théorèmes de Rubey	11
5	Croisements et emboîtements des partitions de $[n]$	14
5.1	k -croisements et k -emboîtements	14
5.2	Graphes k -non-croisés et k -non-emboîtés sur $[n]$	17
5.3	Une bijection avec des chemins dans le plan et l'espace	20
6	Conclusion	23
7	Annexe 1 : Les diagrammes de croissance généralisés	24
8	Annexe 2 : Notions sur les complexes simpliciaux	26
9	Annexe 3 : Une bijection entre partitions de $[n]$ et tableaux vascillants	28

References

- [1] Mireille Bousquet-Melou and Einar Steingrímsson, *Decreasing subsequences in permutations and Wilf equivalence for involutions*, Journal of Algebraic Combinatorics (2005), no. 4, 383–409, math.CO/0405334.
- [2] William Y. C. Chen, Eva Y. P. Deng, Rosena R. X. Du, Richard P. Stanley, and Catherine H. Yan, *Crossings and nestings of matchings and partitions*, Transactions of the American Mathematical Society (2006), math.CO/0501230.
- [3] Anna de Mier, *k-noncrossing and k-nonnesting graphs and fillings of Ferrers diagrams*, math.CO/0602195.
- [4] Sergey Fomin, *The generalized Robinson-Schensted-Knuth correspondence*, Zapiski Nauchnykh Seminarov Leningradskogo Otdeleniya Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova Akademii Nauk SSSR (LOMI) **155** (1986), no. Differentsialnaya Geometriya, Gruppy Li i Mekh. VIII, 156–175, 195.
- [5] Jakob Jonsson, *Generalized triangulations and diagonal-free subsets of stack polyominoes*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **112** (2005), no. 1, 117–142.
- [6] Anisse Kasraoui and Jiang Zeng, *Distribution of crossings, nestings and alignments of two edges in matchings and partitions*, math.CO/0601081.
- [7] Christian Krattenthaler, *Growth diagrams, and increasing and decreasing chains in fillings of Ferrers shapes*, Advances in Applied Mathematics **37** (2006), 404–431, math.CO/0510676.
- [8] Victor Reiner, *Non-crossing partitions for classical reflection groups*, Discrete Mathematics **177** (1997), no. 1-3, 195–222.
- [9] Richard P. Stanley, *Enumerative combinatorics*, vol. 2, Cambridge University Press, 1999.
- [10] E. Steingrímsson, L. Williams, *Permutation tableaux and permutation patterns*, J. Combin. Theory Ser. A, vol. 114, Issue 2 (2007), 211-234.
- [11] M. Rubey, *Increasing and decreasing sequences in fillings of moon polyominoes*, math.CO/0604140.