Remplissages et suites croissantes/décroissantes dans les polyominos

Yoann Gelineau

5 Septembre 2007

Introduction

- Références principales :
  1. *Crossings and nestings of matchings and partitions*, de W. Chen, E. Deng, R. Du, R. Stanley et C.Yan (2005)
  2. *Growth diagrams, and increasing and decreasing chains in fillings of Ferrers shapes*, de C. Krattenthaler (2005)
  3. *Increasing and decreasing sequences in fillings of moon polyominoes*, de M. Rubey (2006)
  4. *k-noncrossing and k-nonnestings of matchings and partitions*, de A. De Mier (2006)

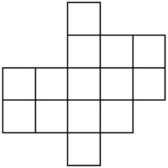
Introduction

- Références principales :
  1. *Crossings and nestings of matchings and partitions*, de W. Chen, E. Deng, R. Du, R. Stanley et C.Yan (2005)
  2. *Growth diagrams, and increasing and decreasing chains in fillings of Ferrers shapes*, de C. Krattenthaler (2005)
  3. *Increasing and decreasing sequences in fillings of moon polyominoes*, de M. Rubey (2006)
  4. *k-noncrossing and k-nonnestings of matchings and partitions*, de A. De Mier (2006)
- Résultats :
  1. Théorèmes concernant le nombre de remplissages des polyominos contenant des k-chaînes Nord-Est et ceux contenant des k-chaînes Sud-Est.

Introduction

- Références principales :
  1. *Crossings and nestings of matchings and partitions*, de W. Chen, E. Deng, R. Du, R. Stanley et C.Yan (2005)
  2. *Growth diagrams, and increasing and decreasing chains in fillings of Ferrers shapes*, de C. Krattenthaler (2005)
  3. *Increasing and decreasing sequences in fillings of moon polyominoes*, de M. Rubey (2006)
  4. *k-noncrossing and k-nonnestings of matchings and partitions*, de A. De Mier (2006)
- Résultats :
  1. Théorèmes concernant le nombre de remplissages des polyominos contenant des k-chaînes Nord-Est et ceux contenant des k-chaînes Sud-Est.
  2. Applications liées aux partitions de l'ensemble $[n]$ ayant des k-croisements et des k-emboîtements, ainsi qu'aux graphes k-non-croisés ou k-non-emboîtés.

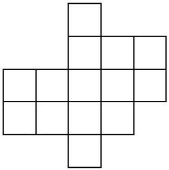
Les polyominos



Definition (Moon polyominos, Diagrammes de Ferrers)

- Un *polyomino* est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^2$, chaque élément de l'ensemble étant considéré comme une case.

Les polyominos

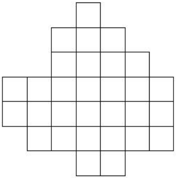


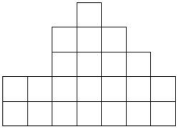
Definition (Moon polyominos, Diagrammes de Ferrers)

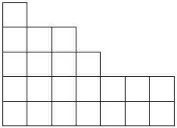
- Un *polyomino* est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^2$, chaque élément de l'ensemble étant considéré comme une case.
- Un polyomino est dit *convexe* s'il est convexe pour chaque ligne et chaque colonne.
- Un polyomino est dit *de libre intersection* si ses colonnes sont deux à deux incluables l'une dans l'autre.

Definition (Moon polyominos, Diagrammes de Ferrers)

- Un polyomino convexe de libre intersection est appelé un *moon polyomino*.
- Un moon polyomino où toutes les colonnes commencent au même niveau est un *polyomino tas*.
- Un polyomino tas où les colonnes sont en ordre décroissant de longueur est un *diagramme de Ferrers*.

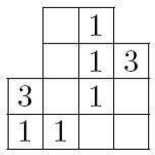






Remplissage par des entiers

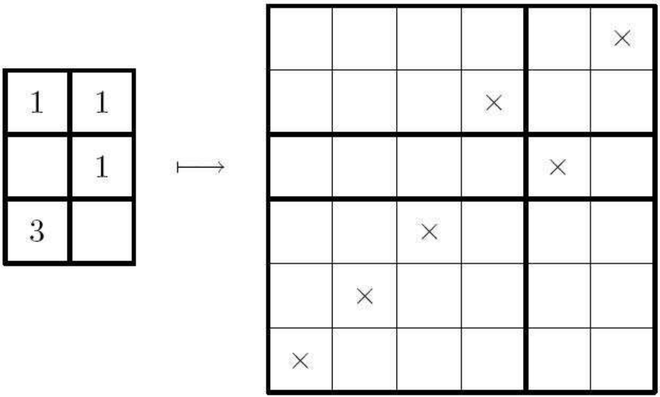
On remplit les moon polyominos par des entiers naturels.
On regarde alors les *chaînes* d'entiers non nuls : chaînes NE, SE, ne, se, Ne, nE, sE, Se.
Chaque chaîne a une *longueur* (nombre de cases, sauf pour les NE et SE où on compte avec multiplicité)



$$\begin{aligned} |ne| &= 3 \\ |se| &= 2 \\ |NE| &= 6 \\ |SE| &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |nE| &= 4 \\ |Ne| &= 3 \\ |sE| &= 3 \\ |Se| &= 2 \end{aligned}$$

Remplissage par des entiers

On peut se ramener à remplir les polyominos uniquement avec des 0 et des 1. On peut "élargir" nos lignes et colonnes et disposer nos 1 en chaîne nord-est (par convention)



Théorème 1 de Rubey

Théorème

Soit P un moon polyomino. On suppose que P est rempli de telle sorte que :

(i) *La ligne L_i contient (en somme) m_i entrées*

(ii) $|ne| = k$

(iii) $|SE| = l$

où les m_i, k et l sont des entiers donnés.

Théorème 1 de Rubey

Théorème

Soit P un moon polyomino. On suppose que P est rempli de telle sorte que :

(i) *La ligne L_i contient (en somme) m_i entrées*

(ii) $|ne| = k$

(iii) $|SE| = l$

où les m_i, k et l sont des entiers donnés.
Alors, le nombre de tels remplissages ne dépend pas de l'ordre des colonnes (tant que le résultat reste un moon polyomino).

Théorème 1 de Rubey

Théorème

Soit P un moon polyomino. On suppose que P est rempli de telle sorte que :

(i) *La ligne L_i contient (en somme) m_i entrées*

(ii) $|ne| = k$

(iii) $|SE| = l$

où les m_i, k et l sont des entiers donnés.
Alors, le nombre de tels remplissages ne dépend pas de l'ordre des colonnes (tant que le résultat reste un moon polyomino).

De plus, si on ne regarde pas la condition **(i)**, *le nombre de remplissages ne dépend que de la structure du moon polyomino.*

Théorème 2 de Rubey

Théorème

Soit P un moon polyomino. On suppose que P est rempli par des $0-1$ de telle sorte que :

(i) *La ligne L_i contient (en somme) m_i entrées*

(ii) $|ne| = k$

où les m_i et k sont des entiers donnés.

Théorème 2 de Rubey

Théorème

Soit P un moon polyomino. On suppose que P est rempli par des $0-1$ de telle sorte que :

(i) *La ligne L_i contient (en somme) m_i entrées*

(ii) $|ne| = k$

où les m_i et k sont des entiers donnés.
Alors, le nombre de tels remplissages ne dépend pas de l'ordre des colonnes (tant que le résultat reste un moon polyomino).

Théorème 2 de Rubey

Théorème

Soit P un moon polyomino. On suppose que P est rempli par des $0-1$ de telle sorte que :

(i) *La ligne L_i contient (en somme) m_i entrées*

(ii) $|ne| = k$

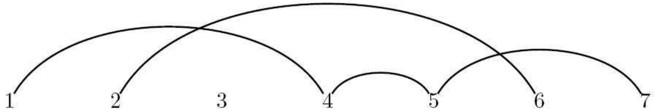
où les m_i et k sont des entiers donnés.
Alors, le nombre de tels remplissages ne dépend pas de l'ordre des colonnes (tant que le résultat reste un moon polyomino).

De plus, si on ne regarde pas la condition **(i)**, *le nombre de remplissages ne dépend que de la structure du moon polyomino.*

Partitions de $[n]$

On considère les partitions de l'ensemble $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, écrites avec leur représentation standard.
Exemple :

$$[7] = \{\ \{1, 4, 5, 7\}\ ,\ \{2, 6\}\ ,\ \{3\}\ \} = \{(1, 4), (4, 5), (5, 7), (2, 6)\}$$



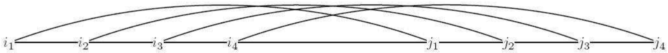
Partitions de $[n]$

Definition (k-croisement)

On définit un *k-croisement* de P comme un sous-ensemble $\{(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)\}$ de P tel que

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k < j_1 < j_2 < \ldots < j_k$$

On note alors *$Cross(P)$* le plus grand k tel que P contienne un k-croisement.



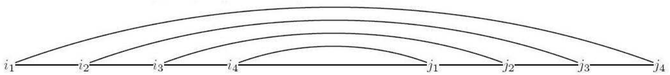
Partitions de $[n]$

Definition (k-emboîtement)

On définit un *k-emboîtement* de P comme un sous-ensemble $\{(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)\}$ de P tel que

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k < j_k < j_{k-1} < \ldots < j_1$$

On note alors $Nest(P)$ le plus grand k tel que P contienne un k-emboîtement.



Partitions de $[n]$

Théorème

Soit $n, s, t \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de partitions de $[n]$ telles que

$$Cross(P) = s \quad et \quad Nest(P) = t$$

est égal au nombre de partitions de $[n]$ telles que

$$Cross(P) = t \quad et \quad Nest(P) = s$$

Partitions de $[n]$

Definition

Pour une partition $P = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ où les $(A_i)_i$ sont 2 à 2 disjoints, on définit les ensembles $min(P)$ et $max(P)$ par

$$min(P) = \{min(A_1), min(A_2), \ldots, min(A_k)\}$$

$$max(P) = \{max(A_1), max(A_2), \ldots, max(A_k)\}$$

Partitions de $[n]$

Definition

Pour une partition $P = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ où les $(A_i)_i$ sont 2 à 2 disjoints, on définit les ensembles $min(P)$ et $max(P)$ par

$$min(P) = \{min(A_1), min(A_2), \ldots, min(A_k)\}$$

$$max(P) = \{max(A_1), max(A_2), \ldots, max(A_k)\}$$

On peut alors pour $S, T \subseteq [n]$ définir $\mathcal{P}(S, T)$ l'ensemble des partitions P telles que $min(P) = S$ et $max(P) = T$.

Partitions de $[n]$

Théorème

Soit $n, s, t \in \mathbb{N}$ et soient S, T deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$. Alors le nombre de partitions P de $[n]$ telles que

$$Cross(P) = s,\ Nest(P) = t,\ min(P) = S \text{ et } max(P) = T$$

est égal au nombre de partitions de $[n]$ telles que

$$Cross(P) = t,\ Nest(P) = s,\ min(P) = S \text{ et } max(P) = T$$

Partitions de $[n]$

Théorème

Soit $n, s, t \in \mathbb{N}$ et soient S, T deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$. Alors le nombre de partitions P de $[n]$ telles que

$$Cross(P) = s,\ Nest(P) = t,\ min(P) = S \text{ et } max(P) = T$$

est égal au nombre de partitions de $[n]$ telles que

$$Cross(P) = t,\ Nest(P) = s,\ min(P) = S \text{ et } max(P) = T$$

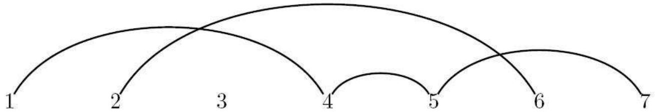
Autrement dit,

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(S,T)} x^{Cross(\pi)} y^{Nest(\pi)} = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(S,T)} x^{Nest(\pi)} y^{Cross(\pi)}$$

Graphes sur $[n]$

Definition

Soit G un graphe sans boucle sur $[n]$.
G est dit *k-non-croisé* s'il ne contient aucun k-croisement. Le plus grand k tel que G ait un k-croisement est noté $Cross(G)$.
G est dit *k-non-emboîté* s'il ne contient aucun k-emboîtement. Le plus grand k tel que G ait un k-emboîtement est noté $Nest(G)$.



Graphes sur $[n]$

Théorème

Pour tout diagramme de Ferrers F et tout entier m fixé, on considère tous les remplissages de F tels que la somme de ses entrées soit égale à m.
Alors pour tout $k > 1$, le nombre de tels remplissages qui ne contiennent pas de chaîne Sud-Est de longueur k est égal au nombre de tels remplissages qui ne contiennent pas de chaîne Nord-Est de longueur k.

Graphes sur $[n]$

Théorème

Pour tout diagramme de Ferrers F et tout entier m fixé, on considère tous les remplissages de F tels que la somme de ses entrées soit égale à m.
Alors pour tout $k > 1$, le nombre de tels remplissages qui ne contiennent pas de chaîne Sud-Est de longueur k est égal au nombre de tels remplissages qui ne contiennent pas de chaîne Nord-Est de longueur k.

Corollaire

Le nombre de graphes k-non-croisés sur $[n]$ possédant m arêtes est égal au nombre de graphes k-non-emboîtés sur $[n]$ possédant m arêtes.

Graphes sur $[n]$

Definition

Soit G un graphe sans boucle sur $[n]$.
On appelle *k-croisement faible de G* tout ensemble de k arêtes $(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)$ telles que

$$i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \; < \; j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_k$$

On note $Cross^*(G)$ le plus grand k tel que G ait un k-croisement faible.

Definition

Soit G un graphe sans boucle sur $[n]$.
On appelle *k-croisement faible de G* tout ensemble de k arêtes $(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)$ telles que

$$i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \; < \; j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_k$$

On note $Cross^*(G)$ le plus grand k tel que G ait un k-croisement faible.
On appelle *k-emboîtement faible de G* tout ensemble de k arêtes $(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)$ telles que

$$i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \; < \; j_k \leq j_{k-1} \leq \ldots \leq j_1$$

On note $Nest^*(G)$ le plus grand k tel que G ait un k-nesting.

Graphes sur $[n]$

Corollaire

Soient n, m, r et s des entiers naturels quelconques.
Le nombre de graphes ayant n sommets et m arêtes tels que

$$Cross(G) = r \text{ et } Nest^*(G) = s$$

est égal au nombre de graphes ayant n sommets et m arêtes tels que

$$Cross^*(G) = s \text{ et } Nest(G) = r$$

Graphes sur $[n]$

Definition

Soit G un graphe sans boucle défini sur $[n]$. On définit la *suite des degrés G/D de G* comme la donnée de $U = (l_i, r_i)_{i=1\dots n}$, où pour chaque i, l_i correspond au nombre d'arêtes partant de i vers des entiers $x < i$, et r_i correspond au nombre d'arêtes partant de i vers des entiers $x > i$.

Graphes sur $[n]$

Proposition

$U = (l_i, r_i)_{i=1\ldots n}$ est une suite de degrés G/D d'un graphe G si et seulement si

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{r} r_i \\ \forall k = 1 \ldots n \ , \sum_{i=1}^{k} l_i \leq \sum_{i=1}^{k-1} r_i \end{cases}$$

Graphes sur $[n]$

Proposition

$U = (l_i, r_i)_{i=1\dots n}$ est une suite de degrés G/D d'un graphe G si et seulement si

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{r} r_i \\ \forall k = 1 \dots n \ , \sum_{i=1}^{k} l_i \leq \sum_{i=1}^{k-1} r_i \end{cases}$$

Théorème

Soit U une suite de degrés G/D. Alors le nombre de graphes G k-non-croisés sur $[n]$ ayant pour suite de degrés G/D la suite U est égal au nombre de graphes G k-non-emboîtés sur $[n]$ ayant pour suite de degrés G/D la suite U.

Graphes sur $[n]$

Definition

On appelle *diagramme à sommes L/C prescrites* tout diagramme muni de deux suites $(\rho_i)_i$ et $(\gamma_j)_j$ d'entiers naturels telles que les seuls remplissages autorisés pour ce diagramme soient ceux tels que les sommes en lignes et colonnes correspondent aux suites (ρ_i) et (γ_j).

Graphes sur $[n]$

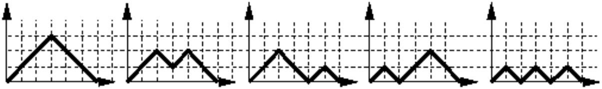
Definition

On appelle *diagramme à sommes L/C prescrites* tout diagramme muni de deux suites $(\rho_i)_i$ et $(\gamma_j)_j$ d'entiers naturels telles que les seuls remplissages autorisés pour ce diagramme soient ceux tels que les sommes en lignes et colonnes correspondent aux suites (ρ_i) et (γ_j).

Théorème

Pour tous les diagrammes T à sommes L/C prescrites, le nombre de remplissage de T évitant des k-chaînes Sud-Est est égal au nombre de remplissage de T évitant des k-chaînes Nord-Est.

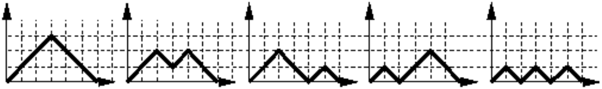
Bijections avec les chemins



Definition

Un *chemin de Dyck* de longueur $2n$ est un chemin dans le plan quadrillé $\mathbb{Z}^2$, allant de l'origine $(0,0)$ au point $(2n,0)$, de pas $(1,1)$ ou $(1,-1)$, qui ne passe jamais en dessous de l'axe des abscisses.

Bijections avec les chemins



Definition

Un *chemin de Dyck* de longueur $2n$ est un chemin dans le plan quadrillé $\mathbb{Z}^2$, allant de l'origine $(0,0)$ au point $(2n,0)$, de pas $(1,1)$ ou $(1,-1)$, qui ne passe jamais en dessous de l'axe des abscisses. Le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ est donné par le n-ième *Nombre de Catalan* :

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Bijections avec les chemins

Definition

Une paire (P, Q) de chemins de Dyck est dite *non-croisée* s'ils ont même origine et même destination, que P n'est jamais situé en dessous de Q.

Bijections avec les chemins

Definition

Une paire (P, Q) de chemins de Dyck est dite *non-croisée* s'ils ont même origine et même destination, que P n'est jamais situé en dessous de Q.

Proposition

1. *L'ensemble des 2-couplages non-croisés est en bijection avec l'ensemble des chemins de Dyck.*
2. *L'ensemble des 3-couplages non-croisés est en bijection avec l'ensemble des paires non-croisées de chemins de Dyck.*

Bijections avec les chemins

Théorème

Supposons $\mathbb{R}^{k-1}$ *muni d'une base* $(e_i)_{i=1\ldots k-1}$. *Alors le nombre de partitions de* $[n]$ k*-non-croisées est égal au nombre de chemins fermés dans la région*

$$V_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}) \ , \ a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{k-1} \geq 0 \ , \ a_i \in \mathbb{Z}\}$$

partant et arrivant en l'origine, de longueur $2n$, *de pas* $\pm e_i$ *ou* $(0, \ldots, 0)$, *avec la propriété que notre chemin "recule" (avec un pas* $-e_i$*) ou stagne (avec un pas de* 0*) après un nombre pair de pas, et à l'inverse qu'il "avance" (avec un pas* $+e_i$*) ou stagne après un nombre impair de pas.*

Fin

Merci.