

INTERPRÉTATIONS COMBINATOIRES DES NOMBRES DE JACOBI-STIRLING

YOANN GELINEAU AND JIANG ZENG

RÉSUMÉ. Les nombres de Jacobi-Stirling de première et de seconde espèces ont été introduits en 2006 dans la théorie spectrale et sont des généralisations polynomiales des nombres de Legendre-Stirling. Andrews et Littlejohn ont récemment donné une interprétation combinatoire pour la deuxième espèce de ces derniers nombres. Remarquant que ces nombres sont très semblables aux nombres factoriels centraux, nous donnons plusieurs interprétations pour les deux espèces des nombres de Jacobi-Stirling, qui fournissent une théorie unifiée des modèles combinatoires pour les deux précédentes suites et également pour les deux espèces de nombres de Stirling.

1. INTRODUCTION

Il est connu que les polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ satisfont à la classique équation différentielle du second ordre de Jacobi :

$$(1 - t^2)y''(t) + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)t)y'(t) + n(n + \alpha + \beta + 1)y(t) = 0. \quad (1.1)$$

Soit $\ell_{\alpha, \beta}[y](t)$ l'opérateur différentiel de Jacobi :

$$\ell_{\alpha, \beta}[y](t) = \frac{1}{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta} \left(-(1-t)^{\alpha+1}(1+t)^{\beta+1}y'(t) \right)'$$

Alors, l'équation (1.1) revient à dire que $y = P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ est solution de

$$\ell_{\alpha, \beta}[y](t) = n(n + \alpha + \beta + 1)y(t).$$

Dans [5, Théorème 4.2], pour tout $n \in \mathbb{N}$, Everitt et al. ont donné le développement suivant de la n -ième composée de $\ell_{\alpha, \beta}$:

$$(1-t)^\alpha(1+t)^\beta \ell_{\alpha, \beta}^n[y](t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(P^{(\alpha, \beta)} S_n^k (1-t)^{\alpha+k} (1+t)^{\beta+k} y^{(k)}(t) \right)^{(k)},$$

où les $P^{(\alpha, \beta)} S_n^k$ sont appelés les nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce. Ils [5, (4.4)] ont aussi donné une formule sommatoire explicite pour les nombres $P^{(\alpha, \beta)} S_n^k$, montrant que ces nombres ne dépendent réellement que d'un seul paramètre $z =$

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 05A05, 05A15, 33C45; Secondary 05A10, 05A18, 34B24.

Key words and phrases. nombres de Jacobi-Stirling, nombres de Legendre-Stirling, nombres de Stirling, nombres factoriels centraux, partitions signées, quasi-permutations, quasi-permutations à simples équerres, complexes de Riordan.

TABLE 1. Les premières valeurs de $JS_n^k(z)$

$k \setminus n$	1	2	3	4	5	6
1	1	$z+1$	$(z+1)^2$	$(z+1)^3$	$(z+1)^4$	$(z+1)^5$
2		1	$5+3z$	$21+24z+7z^2$	$85+141z+79z^2+15z^3$	$341+738z+604z^2+222z^3+31z^4$
3			1	$14+6z$	$147+120z+25z^2$	$1408+1662z+664z^2+90z^3$
4				1	$30+10z$	$627+400z+65z^2$
5					1	$55+15z$
6						1

$\alpha+\beta+1$. Ainsi, on peut définir les nombres de Jacobi-Stirling comme les coefficients de relation dans l'équation suivante :

$$x^n = \sum_{k=0}^n JS_n^k(z) \prod_{i=0}^{k-1} (x - i(z+i)), \quad (1.2)$$

où $JS_n^k(z) = P^{(\alpha,\beta)} S_n^k$, alors que les nombres de Jacobi-Stirling de première espèce peuvent être définis en inversant l'équation ci-dessus :

$$\prod_{i=0}^{n-1} (x - i(z+i)) = \sum_{k=0}^n js_n^k(z) x^k, \quad (1.3)$$

où $js_n^k(z) = P^{(\alpha,\beta)} s_n^k$ dans les notations de [5].

Il s'ensuit de (1.2) et (1.3) que les nombres de Jacobi-Stirling $JS_n^k(z)$ et $js_n^k(z)$ satisfont, respectivement, les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} JS_0^0(z) = 1, & JS_n^k(z) = 0, \quad \text{si } k \notin \{1, \dots, n\}, \\ JS_n^k(z) = JS_{n-1}^{k-1}(z) + k(k+z) JS_{n-1}^k(z), & n, k \geq 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

et

$$\begin{cases} js_0^0(z) = 1, & js_n^k(z) = 0, \quad \text{si } k \notin \{1, \dots, n\}, \\ js_n^k(z) = js_{n-1}^{k-1}(z) - (n-1)(n-1+z) js_{n-1}^k(z), & n, k \geq 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

Les premières valeurs de $JS_n^k(z)$ et $js_n^k(z)$ sont données, respectivement, dans les Tables 1 et 2.

Comme il a été remarqué dans [4, 5, 1], les définitions précédentes rappellent naturellement les classiques *nombres de Stirling* de seconde (resp. première) espèce $S(n, k)$ (resp. $s(n, k)$), qui sont définis (voir [2]) par

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) \prod_{i=0}^{k-1} (x - i), \quad \prod_{i=0}^{n-1} (x - i) = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k,$$

et satisfont les récurrences suivantes :

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k), \quad n, k \geq 1, \quad (1.6)$$

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1)s(n-1, k), \quad n, k \geq 1. \quad (1.7)$$

Le point de départ de cet article est l'observation que les *nombres factoriels centraux* de seconde (resp. première) espèce $T(n, k)$ (resp. $t(n, k)$) semblent plus appropriés en vue d'une comparaison. En effet, ces nombres sont définis dans l'ouvrage de Riordan [8, p. 213-217] par

$$x^n = \sum_{k=0}^n T(n, k) x \prod_{i=1}^{k-1} \left(x + \frac{k}{2} - i \right), \quad (1.8)$$

TABLE 2. Les premières valeurs de $js_n^k(z)$

$k \setminus n$	1	2	3	4	5
1	1	$-z - 1$	$2z^2 + 6z + 4$	$-6z^3 - 36z^2 - 66z - 36$	$24z^4 + 240z^3 + 840z^2 + 1200z + 576$
2		1	$-3z - 5$	$11z^2 + 48z + 49$	$-50z^3 - 404z^2 - 1030z - 820$
3			1	$-6z - 14$	$35z^2 + 200z + 273$
4				1	$-10z - 30$
5					1

et

$$x \prod_{i=1}^{n-1} \left(x + \frac{n}{2} - i \right) = \sum_{k=0}^n t(n, k) x^k. \quad (1.9)$$

En conséquence, si on note les nombres factoriels centraux d'indices pairs par $U(n, k) = T(2n, 2k)$ et $u(n, k) = t(2n, 2k)$, alors :

$$U(n, k) = U(n-1, k-1) + k^2 U(n-1, k), \quad (1.10)$$

$$u(n, k) = u(n-1, k-1) - (n-1)^2 u(n-1, k). \quad (1.11)$$

Des équations (1.4)-(1.11), on peut facilement déduire le résultat suivant.

Theorème 1. Soient n, k deux entiers positifs avec $n \geq k$. Les nombres de Jacobi-Stirling $JS_n^k(z)$ et $(-1)^{n-k} js_n^k(z)$ sont des polynômes en z de degré $n-k$ à coefficients entiers positifs. De plus, si

$$JS_n^k(z) = a_{n,k}^{(0)} + a_{n,k}^{(1)} z + \cdots + a_{n,k}^{(n-k)} z^{n-k}, \quad (1.12)$$

$$(-1)^{n-k} js_n^k(z) = b_{n,k}^{(0)} + b_{n,k}^{(1)} z + \cdots + b_{n,k}^{(n-k)} z^{n-k}, \quad (1.13)$$

alors

$$a_{n,k}^{(n-k)} = S(n, k), \quad a_{n,k}^{(0)} = U(n, k), \quad b_{n,k}^{(n-k)} = |s(n, k)|, \quad b_{n,k}^{(0)} = |u(n, k)|.$$

On peut remarquer que lorsque $z = 1$, les nombres de Jacobi-Stirling deviennent les *nombres de Legendre-Stirling* de première et de seconde espèce s [4] :

$$LS(n, k) = JS_n^k(1), \quad ls(n, k) = js_n^k(1). \quad (1.14)$$

La nature même des coefficients impliqués dans les polynômes ci-dessus réclame une interprétation combinatoire. En effet, il est classique (voir [2]) que le nombre de Stirling $S(n, k)$ (resp. $|s(n, k)|$) compte le nombre de partitions (resp. permutations) de $[n] := \{1, \dots, n\}$ en k blocs (resp. cycles). En 1974, dans son étude des nombres de Genocchi, Dumont [3] a découvert la première interprétation combinatoire des nombres factoriels centraux $U(n, k)$ en termes de couples de quasi-permutations superdiagonales de $[n]$ (cf. § 2). Récemment, Andrews et Littlejohn [1] ont interprété $JS_n^k(1)$ en termes de partitions d'ensembles (cf. § 2).

Plusieurs questions se dégagent naturellement après avoir rappelé ces résultats connus :

- Premièrement, quelle est la généralisation combinatoire du modèle d'Andrews et Littlejohn qui donnerait la signification du coefficient $a_{n,k}^{(i)}$?
- Ensuite, existe-t-il une relation entre le modèle de Dumont et celui d'Andrews et Littlejohn ?

- Enfin, existe-t-il une interprétation combinatoire pour le coefficient $b_{n,k}^{(i)}$ dans les nombres de Jacobi-Stirling de première espèce, généralisant celle du nombre de Stirling $|s(n, k)|$?

Le but de cet article est de répondre à toutes ces questions. Des résultats additionnels du même type seront également présents.

Dans la partie 2, après avoir introduit quelques définitions nécessaires, nous donnerons deux interprétations combinatoires pour le coefficient $a_{n,k}^{(i)}$ dans $\text{JS}_n^k(z)$ ($0 \leq i \leq n - k$), et construire explicitement une bijection entre les deux modèles. Dans la partie 3, nous donnerons une interprétation combinatoire pour le coefficient $b_{n,k}^{(i)}$ dans $\text{js}_n^k(z)$ ($0 \leq i \leq n - k$). Dans la partie 4, nous donnerons l'interprétation combinatoire pour deux suites qui sont multiples des nombres factoriels centraux d'indices impairs, et nous établirons un moyen simple d'obtenir la formule explicite des nombres de Jacobi-Stirling.

2. LES NOMBRES DE JACOBI-STIRLING NUMBERS DE SECONDE ESPÈCE $\text{JS}_n^k(z)$

2.1. Une première interprétation. Pour tout entier positif n , on définit

$$[\pm n]_0 := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots, n, -n\}.$$

La définition suivante est équivalente à celle donnée par Andrews et Littlejohn [1] dans le but d'interpréter les nombres de Legendre-Stirling, où 0 a été ajouté pour éviter d'avoir un bloc vide et pour être plus proche du modèle des nombres de Jacobi-Stirling de première espèce.

Définition 1. Une k -partition signée de $[\pm n]_0$ est une partition de $[\pm n]_0$ en $k + 1$ blocs non-vides B_0, B_1, \dots, B_k avec les règles suivantes :

- (1) $0 \in B_0$ et $\forall i \in [n], \{i, -i\} \not\subset B_0$,
- (2) $\forall j \in [k]$ et $\forall i \in [n]$, on a $\{i, -i\} \subset B_j \iff i = \min B_j \cap [n]$.

Par exemple, la partition $\pi = \{\{2, -5\}_0, \{\pm 1, -2\}, \{\pm 3\}, \{\pm 4, 5\}\}$, est une 3-partition signée de $[\pm 5]_0$, où $\{2, -5\}_0 := \{0, 2, -5\}$ est le bloc-zéro.

Theorème 2. Pour tous entiers positifs n et k , l'entier $a_{n,k}^{(i)}$ ($0 \leq i \leq n - k$) est le nombre de k -partitions signées de $[\pm n]_0$ telles que le bloc-zéro contient i valeurs négatives.

Démonstration. Soit $\mathcal{A}_{n,k}^{(i)}$ l'ensemble des k -partitions signées de $[\pm n]_0$ telles que le bloc-zéro contient i valeurs négatives et posons $\tilde{a}_{n,k}^{(i)} = |\mathcal{A}_{n,k}^{(i)}|$. Par convention $\tilde{a}_{0,0}^{(0)} = 1$. Clairement, $\tilde{a}_{1,1}^{(0)} = 1$ et pour que $\tilde{a}_{n,k}^{(i)} \neq 0$, on doit avoir $n \geq k \geq 1$ et $0 \leq i \leq n - k$. On sépare $\mathcal{A}_{n,k}^{(i)}$ en quatre groupes :

- (i) les k -partitions signées de $[\pm n]_0$ qui ont $\{-n, n\}$ pour bloc. Clairement, le nombre de telles partitions est $\tilde{a}_{n-1,k-1}^{(i)}$.
- (ii) les k -partitions signées de $[\pm n]_0$ qui ont n dans le bloc-zéro. On peut construire de telles partitions en choisissant déjà une k -partition signée de $[\pm(n-1)]_0$ avec i valeurs négatives dans le bloc-zéro, puis en insérant n dans le bloc-zéro et $-n$ dans un des k ; ainsi il y a $k\tilde{a}_{n-1,k}^{(i)}$ possibilités.
- (iii) les k -partitions signées de $[\pm n]_0$ qui ont $-n$ dans le bloc-zéro. On peut construire de telles partitions en choisissant déjà une k -partition signée de

$[\pm(n-1)]_0$ avec $i-1$ valeurs négatives dans le bloc-zéro, puis en insérant $-n$ dans le bloc-zéro et n dans un des k ; ainsi il y a $k\tilde{a}_{n-1,k}^{(i-1)}$ possibilités.

- (iv) les k -partitions signées de $[\pm n]_0$ où ni n ni $-n$ n'apparaît dans le bloc-zéro et où $\{-n, n\}$ n'est pas un bloc. On peut construire de telles partitions en choisissant déjà une k -partition signée de $[\pm(n-1)]_0$ avec i valeurs négatives dans le bloc-zéro, puis en insérant n et $-n$ dans deux blocs différents, autres que le bloc-zéro; ainsi il y a $k(k-1)\tilde{a}_{n-1,k}^{(i)}$ possibilités.

En résumé, nous obtenons l'équation suivante :

$$\tilde{a}_{n,k}^{(i)} = \tilde{a}_{n-1,k-1}^{(i)} + k\tilde{a}_{n-1,k}^{(i-1)} + k^2\tilde{a}_{n-1,k}^{(i)}. \quad (2.1)$$

Enfin, avec (1.4), il est facile de voir que les $a_{n,k}^{(i)}$ satisfont la même récurrence et mêmes conditions initiales que les $\tilde{a}_{n,k}^{(i)}$, ils coïncident donc. \square

Puisque $LS(n, k) = \sum_{i=0}^{n-k} a_{n,k}^{(i)}$, le Théorème 2 implique immédiatement le résultat suivant d'Andrews et Littlejohn [1].

Corollaire 1. L'entier $LS(n, k)$ est le nombre de k -partitions signées de $[\pm n]_0$.

Par les Théorèmes 1 et 2, on déduit que l'entier $S(n, k)$ est le nombre de k -partitions signées de $[\pm n]_0$ telles que le bloc-zéro contient $n-k$ valeurs négatives. Par définition, dans ce cas, il n'y a pas d'entrée positive dans le bloc-zéro. En effaçant les entrées signées dans les k blocs restants, on retrouve alors l'interprétation connue suivante pour le nombre de Stirling de seconde espèce

Corollaire 2. L'entier $S(n, k)$ est le nombre partitions de $[n]$ en k blocs.

Pour une partition $\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ en k blocs, on note $\min \pi$ l'ensemble des minimaux de blocs

$$\min \pi = \{\min(B_1), \dots, \min(B_k)\}.$$

L'interprétation suivante de Dumont en termes de partitions pour les nombres factoriels centraux d'indices pairs peut être trouvée dans [6, Chap. 3].

Corollaire 3. L'entier $U(n, k)$ est le nombre de couples (π_1, π_2) de partitions de $[n]$ en k blocs telles que $\min(\pi_1) = \min(\pi_2)$.

Démonstration. Comme $U(n, k) = a_{n,k}^{(0)}$, d'après le Théorème 2, l'entier $U(n, k)$ compte le nombre de k -partitions signées de $[\pm n]_0$ telles que le bloc-zéro ne contient pas de valeur positive. Pour une telle k -partition signée π , on applique l'algorithme suivant : (i) on déplace chaque valeur positive j du bloc-zéro dans le bloc B_j qui contient $-j$ pour obtenir une k -partition signée $\pi' = \{\{0\}, B_1, \dots, B_k\}$, (ii) π_1 est obtenue en effaçant les valeurs négatives dans chaque bloc B_i de π' , et π_2 est obtenue en effaçant les valeurs positives, puis en prenant les valeurs opposées des valeurs négatives dans chaque bloc de π' . Par exemple, si $\pi = \{\{3\}_0, \{\pm 1, -3, 4\}, \{\pm 2, -4\}\}$ est la 2-partition signée de $[\pm 4]_0$, le couple correspondant de partitions est (π_1, π_2) où $\pi_1 = \{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}$ et $\pi_2 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$. \square

Le résultat suivant montre que les coefficients dans le développement des nombres de Jacobi-Stirling $JS_n^k(z)$ dans la base $\{1, z+1, \dots, (z+1)^{n-k}\}$ sont également intéressants.

TABLE 3. Les premières valeurs de $JS_n^k(z)$ dans la base $\{1, z + 1, \dots, (z + 1)^{n-k}\}$

$k \setminus n$	1	2	3	4	5
1	1	$(z + 1)$	$(z + 1)^2$	$(z + 1)^3$	$(z + 1)^4$
2		1	$2 + 3(z + 1)$	$4 + 10(z + 1) + 7(z + 1)^2$	$8 + 28(z + 1) + 34(z + 1)^2 + 15(z + 1)^3$
3			1	$8 + 6(z + 1)$	$52 + 70(z + 1) + 25(z + 1)^2$
4				1	$20 + 10(z + 1)$
5					1

Théorème 3. *Posons*

$$JS_n^k(z) = d_{n,k}^{(0)} + d_{n,k}^{(1)}(z + 1) + \dots + d_{n,k}^{(n-k)}(z + 1)^{n-k}. \quad (2.2)$$

Alors, le coefficient $d_{n,k}^{(i)}$ est un entier positive, qui compte le nombre de k -partitions signées de $[\pm n]_0$ telles que le bloc-zéro contient uniquement le zéro et i valeurs positives.

Démonstration. On déduit de (1.4) que les coefficients $d_{n,k}^{(i)}$ vérifient la relation de récurrence suivante :

$$d_{n,k}^{(i)} = d_{n-1,k-1}^{(i)} + kd_{n-1,k}^{(i-1)} + k(k-1)d_{n-1,k}^{(i)}. \quad (2.3)$$

Comme pour les nombres $a_{n,k}^{(i)}$, on peut montrer le résultat par un argument similaire que dans le Théorème 2. \square

Corollaire 4. L'entier $J_n^k(-1) = d_{n,k}^{(0)}$ est le nombre de k -partitions signées de $[\pm n]_0$ qui ont $\{0\}$ pour bloc-zéro.

Remarque 1. A priori, il n'était pas évident que $J_n^k(-1) = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i a_{n,k}^{(i)}$ soit positif.

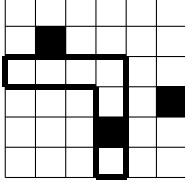
D'après les Théorèmes 1 et (2.2), on peut déduire les relations suivantes :

$$a_{n,k}^{(i)} = \sum_{j=i}^{n-k} \binom{j}{i} d_{n,k}^{(j)}, \quad U(n, k) = \sum_{j=i}^{n-k} d_{n,k}^{(j)}, \quad LS(n, k) = \sum_{j=i}^{n-k} 2^j d_{n,k}^{(j)}. \quad (2.4)$$

On peut donner des interprétations combinatoires pour ces formules. Par exemple pour la première, on peut partitionner l'ensemble $\mathcal{A}_{n,k}^{(i)}$ en comptant le nombre total j d'éléments dans le bloc-zéro ($1 \leq j \leq n - k$). Alors pour construire un tel élément, on commence par prendre une k -partition signée de $[\pm n]_0$ qui n'a pas de valeurs positives dans le bloc-zéro, donc il y a $d_{n,k}^{(j)}$ possibilités, and ensuite on choisit les $j - i$ nombres qui sont positifs parmi les j possibilités du zéro-bloc. Des preuves similaires peuvent être facilement décrites pour les deux autres formules.

2.2. Une seconde interprétation. Nous proposons à présent un second modèle combinatoire pour le coefficient $a_{n,k}^{(i)}$, inspiré des travaux de Foata-Schützenberger [7] et Dumont [3]. Notons \mathcal{S}_n l'ensemble des permutations de $[n]$. Dans le reste de cet article, on identifiera toute permutation σ de \mathcal{S}_n avec son diagramme $\mathcal{D}(\sigma) = \{(i, \sigma(i)) : i \in [n]\}$.

FIGURE 1. L'équerre diagonale H_4 et une quasi-permutation à simples équerres de $[6]$: $Q = \{(2, 5), (4, 2), (6, 3)\}$



Pour tout ensemble fini X , on notera $|X|$ son cardinal. Si $\alpha = (i, j) \in [n] \times [n]$, on définit $\text{pr}_x(\alpha) = i$ et $\text{pr}_y(\alpha) = j$ les projections en x et y . Pour tout sous-ensemble Q de $[n] \times [n]$, on définit les projections en x et y par

$$\text{pr}_x(Q) = \{\text{pr}_x(\alpha) : \alpha \in Q\}, \quad \text{pr}_y(Q) = \{\text{pr}_y(\alpha) : \alpha \in Q\};$$

et les parties super-diagonales et sous-diagonales par

$$Q^+ = \{(i, j) \in Q : i \leq j\}, \quad Q^- = \{(i, j) \in Q : i \geq j\}.$$

Définition 2. Une k -quasi-permutation à simples équerres de $[n]$ est un sous-ensemble Q de $[n] \times [n]$ tel que

- i) $Q \subset \mathcal{D}(\sigma)$ pour une permutation σ de $[n]$,
- ii) $|Q| = n - k$ et $\text{pr}_x(Q^-) \cap \text{pr}_y(Q^+) = \emptyset$.

Une k -quasi-permutation à simples équerres Q de $[n]$ peut être illustrée en noircissant les $n - k$ cases correspondantes de Q dans un tableau carré de taille $n \times n$. Inversement, si on définit les équerres diagonales $H_i := \{(i, j) : i \leq j\} \cup \{(j, i) : i \leq j\}$ ($1 \leq i \leq n$), alors un sous-ensemble noirci d'un tableau carré de taille $n \times n$ représente une quasi-permutation à simples équerres s'il n'y a pas de case noire sur la diagonale principale et au plus une case noire par ligne, par colonne et par équerre diagonale. Un exemple est donné dans la Figure 1.

Theorème 4. L'entier $a_{n,k}^{(i)}$ ($1 \leq i \leq n - k$) est le nombre de couples (Q_1, Q_2) de k -quasi-permutations à simples équerres de $[n]$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$Q_1^- = Q_2^-, \quad |Q_1^-| = |Q_2^-| = i \quad \text{and} \quad \text{pr}_y(Q_1) = \text{pr}_y(Q_2). \quad (2.5)$$

Démonstration. Soit $\mathcal{C}_{n,k}^{(i)}$ l'ensemble des couples (Q_1, Q_2) de k -quasi-permutations à simples équerres de $[n]$ vérifiant (2.5), et notons $c_{n,k}^{(i)} = |\mathcal{C}_{n,k}^{(i)}|$.

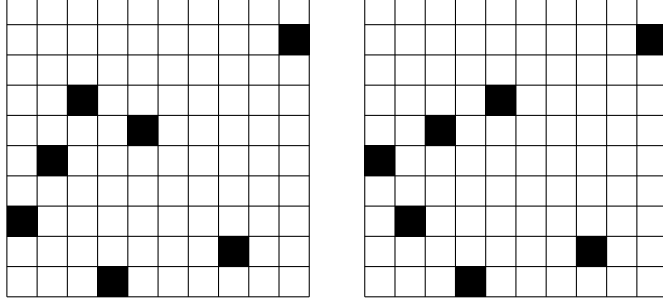
Par exemple, le couple (Q_1, Q_2) où

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 1), (5, 6), (8, 2), (10, 9)\}, \\ Q_2 &= \{(1, 5), (2, 3), (3, 6), (4, 1), (5, 7), (8, 2), (10, 9)\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

est un élément de $\mathcal{C}_{10,3}^{(3)}$. On pourra trouver une représentation graphique de ce couple dans la Figure 2.

On partitionne l'ensemble $\mathcal{C}_{n,k}^{(i)}$ en trois groupes :

- les couples (Q_1, Q_2) tels que les n -ièmes lignes et n -ièmes colonnes de Q_1 et Q_2 sont vides. Clairement, il y a $c_{n-1,k-1}^{(i)}$ tels éléments.
- les couples (Q_1, Q_2) tels que les n -ièmes colonnes de Q_1 et Q_2 sont non vides. On construit d'abord un couple (Q'_1, Q'_2) de $\mathcal{C}_{n-1,k}^{(i-1)}$ et on choisit alors une case

FIGURE 2. Un couple de quasi-permutations à simples équerres de $\mathcal{C}_{10,3}^{(3)}$ 

en même position des n -ième colonnes des deux quasi-permutations; il y a $n - 1 - (n - k - 1)$ positions possibles. Ainsi, il y a $kc_{n-1,k}^{(i-1)}$ tels éléments.

- les couples (Q_1, Q_2) tels que les n -ième lignes de Q_1 et Q_2 sont non vides. On construit d'abord un couple (Q'_1, Q'_2) de $\mathcal{C}_{n-1,k}^{(i)}$ et on ajoute ensuite une case noire en haut de chaque quasi-permutation; chaque case peut être placée en haut des $n - 1 - (n - k - 1) = k$ colonnes qui sont vides. Ainsi, il y a $k^2 c_{n-1,k}^{(i)}$ tels éléments.

En conclusion, on obtient la récurrence

$$c_{n,k}^{(i)} = c_{n-1,k-1}^{(i)} + kc_{n-1,k}^{(i-1)} + k^2 c_{n-1,k}^{(i)}. \quad (2.7)$$

D'après (1.4), on voit que $a_{n,k}^{(i)}$ satisfait la même relation de récurrence et les conditions initiales que $c_{n,k}^{(i)}$, donc ils coïncident. \square

Remarque 2. Dans le premier modèle, nous n'avions pas d'interprétation directe pour le coefficient k^2 dans (2.1) car il résultait de la simplification $k + k(k - 1) = k^2$. Dans le second modèle contrairement, on peut voir ce que le coefficient k^2 compte dans (2.7).

Définition 3. Une *quasi-permutation super-diagonale* (resp. *sous-diagonale*) de $[n]$ est une quasi-permutation à simples équerres Q de $[n]$ avec $Q^- = \emptyset$ (resp. $Q^+ = \emptyset$).

À l'aide des Théorèmes 1 et 4, on retrouve l'interprétation combinatoire de Dumont pour les nombres factoriels centraux de seconde espèce [3], et celle de Riordan pour les nombres de Stirling de seconde espèce (voir [7, Prop. 2.7]).

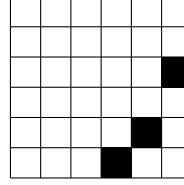
Corollaire 5. L'entier $U(n, k)$ est le nombre de couples (Q_1, Q_2) de k -quasi-permutations super-diagonales de $[n]$ telles que $pr_y(Q_1) = pr_y(Q_2)$.

Corollaire 6. L'entier $S(n, k)$ est le nombre de k -quasi-permutations sous-diagonales (resp. super-diagonales) de $[n]$.

Remarque 3. Pour retrouver l'interprétation classique de $S(n, k)$ du Corollaire 2, on peut appliquer une simple bijection, notée φ , de [7, Prop. 3]. Partant d'une k -partition $\pi = \{B_1, \dots, B_k\}$ pour chaque bloc non-singleton $B_i = \{p_1, p_2, \dots, p_{n_i}\}$ contenant $n_i \geq 1$ éléments $p_1 < p_2 < \dots < p_{n_i}$, on associe la quasi-permutation sous-diagonale $Q_i = \{(p_{n_i}, p_{n_i-1}), (p_{n_i-1}, p_{n_i-2}), \dots, (p_2, p_1)\}$ avec $n_i - 1$ éléments

FIGURE 3. La quasi-permutation sous-diagonale qui correspond à une partition par l'application φ

$$\pi = \{\{1, 4, 6\}, \{2, 5\}, \{3\}\} \longrightarrow$$



de $[n] \times [n]$. Clairement, la réunion de tels Q_i est une quasi-permutation sous-diagonale de cardinal $n - k$. Un exemple pour la transformation φ est donnée dans la Figure 3.

Enfin, on peut déduire des Théorèmes 4 et (1.14) une nouvelle interprétation combinatoire pour les nombres de Legendre-Stirling de seconde espèce. La correspondance entre les modèles sera établie dans le prochain paragraphe.

Corollaire 7. L'entier $LS(n, k)$ est le nombre de couples (Q_1, Q_2) de k -quasi-permutations à simples équerres de $[n]$ telles que $pr_y(Q_1) = pr_y(Q_2)$.

Remarque 4. Nous n'avons pas trouvé d'interprétation ni pour les nombres $d_{n,k}^{(i)}$ de (2.2), ni pour les formules présentes dans (2.4), en termes de quasi-permutations à simples équerres.

2.3. Le lien entre les deux modèles. On introduit une troisième interprétation qui permet de rendre plus visible les liens entre les deux modèles précédents. Nous noterons $\Pi_{n,k}$ l'ensemble des partitions de $[n]$ en k blocs non-vides.

Définition 4. Soit $\mathcal{B}_{n,k}^{(i)}$ l'ensemble des triplets (π_1, π_2, π_3) de $\Pi_{n,k+i} \times \Pi_{n,k+i} \times \Pi_{n,n-i}$ tels que :

- i) $\min(\pi_1) = \min(\pi_2)$ et $\text{Sing}(\pi_1) = \text{Sing}(\pi_2)$,
- ii) $\min(\pi_1) \cup \text{Sing}(\pi_3) = \text{Sing}(\pi_1) \cup \min(\pi_3) = [n]$,

où $\text{Sing}(\pi)$ est l'ensemble des singletons de π .

Nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 5. Pour $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \in \mathcal{B}_{n,k}^{(i)}$, on a :

- i) $|\min(\pi_1) \cap \min(\pi_3)| = k$,
- ii) $|\text{Sing}(\pi_1) \setminus \min(\pi_3)| = i$,
- iii) $|\text{Sing}(\pi_3) \setminus \min(\pi_1)| = n - k - i$.

Démonstration. Par définition, on a $|\min(\pi_1)| = k+i$ et $|\min(\pi_3)| = n-i$. Puisque $\min(\pi_1) \cup \min(\pi_3) = [n]$, par la formule du Crible, on déduit que

$$|\min(\pi_1) \cap \min(\pi_3)| = |\min(\pi_1)| + |\min(\pi_3)| - |\min(\pi_1) \cup \min(\pi_3)| = k,$$

et

$$|\text{Sing}(\pi_1) \setminus \min(\pi_3)| = |\text{Sing}(\pi_1)| - |\text{Sing}(\pi_1) \cap \min(\pi_3)| = n - |\min(\pi_3)| = i.$$

De la même façon, on obtient iii). □

Théorème 6. Il existe une bijection entre $\mathcal{A}_{n,k}^{(i)}$ et $\mathcal{B}_{n,k}^{(i)}$.

Démonstration. Soit $\pi = \{B_0, B_1, \dots, B_k\}$ une k -partition signée de $\mathcal{A}_{n,k}^{(i)}$. On construit le triplet de partitions (π_1, π_2, π_3) grâce à l'algorithme suivant.

- π_1, π_2 :
- Soit $\pi' = \{B'_0, B'_1, \dots, B'_k\}$ la partition obtenue en échangeant tous les j et $-j$ de π si $j \in B_0$ (resp. $j \in [n]$).
 - Soit $\pi'' = \{B''_0, B''_1, \dots, B''_k\}$ la partition obtenue en enlevant toutes les valeurs négatives dans π' .
 - On définit π_1 (resp. π_2) comme la partition obtenue en isolant les i éléments positifs de B''_0 en i singletons et en effaçant 0 dans π'' .

Les partitions obtenues π_1 et π_2 sont clairement des éléments de $\Pi_{n,k+i}$ et satisfont $\min(\pi_1) = \min(\pi_2)$ et $\text{Sing}(\pi_1) = \text{Sing}(\pi_2)$.

- π_3 :
- Pour tout $p \in [n] \setminus \min \pi$ tel que $B_0 \cap \{\pm p\} = \emptyset$, déplacer p dans le bloc-zéro pour obtenir une partition $\pi' = \{B'_0, B'_1, \dots, B'_k\}$. Ainsi, il y a $n - k - i$ valeurs positives dans le nouveau bloc B'_0 .
 - Soit $\pi'' = \{B''_0, B''_1, \dots, B''_k\}$ la partition obtenue en enlevant toutes les valeurs négatives dans π' .
 - On définit π_3 comme la partition obtenue en isolant les $n - k - i$ éléments positifs de B''_0 en $n - k - i$ singletons et en effaçant 0 dans π'' .

La partition obtenue π_3 est un élément de $\Pi_{n,n-i}$.

Pour tout $p \in [n] \setminus \min(\pi_1)$, si $p \notin B_0$ alors $B_0 \cap \{\pm p\} \neq \emptyset$, par définition p sera déplacé dans le bloc-zéro, dans l'autre cas p était déjà dans le bloc-zéro. Ainsi, les éléments qui ne sont pas dans $\min(\pi_1)$ deviennent des singletons dans π_3 . Ainsi $\min(\pi_1) \cup \text{Sing}(\pi_3) = [n]$. De même, on a $\text{Sing}(\pi_1) \cup \min(\pi_3) = [n]$.

Par exemple, prenons la 3-partition signée de $[\pm 10]_0$:

$$\pi = \{\{-4, 6, 7, -8, -10\}_0, \{\pm 1, 3, 4, -5, -7\}, \{\pm 2, -3, 5, -6, 8\}, \{\pm 9, 10\}\}, \quad (2.8)$$

Le triplet correspondant est $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \in \Pi_{10,6} \times \Pi_{10,6} \times \Pi_{10,7}$ où :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \{\{1, 3, 7\}, \{2, 5, 6\}, \{4\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}\}, \\ \pi_2 &= \{\{1, 5, 7\}, \{2, 3, 6\}, \{4\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}\}, \\ \pi_3 &= \{\{1, 4\}, \{2, 8\}, \{3\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{9, 10\}\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Réciproquement, soit (π_1, π_2, π_3) un élément de $\mathcal{B}_{n,k}^{(i)}$, on construit $\pi = \{B_0, B_1, \dots, B_k\}$ une k -partition signée de $[\pm n]_0$ par la procédure suivante :

- Utiliser les k éléments de $\min(\pi_1) \cap \min(\pi_3)$, disons p_1, \dots, p_k , et 0 pour créer $k + 1$ blocs :

$$B_0 = \{\dots\}_0, B_1 = \{\pm p_1, \dots\}, \dots, B_k = \{\pm p_k \dots\}, \quad (2.10)$$

où “...” signifie que les blocs ne sont pas encore complétés. Par exemple, pour le triplet (π_1, π_2, π_3) de (2.9), on crée quatre blocs : $\{0, \dots\}$, $\{\pm 1, \dots\}$, $\{\pm 2, \dots\}$ et $\{\pm 9, \dots\}$.

- Pour tout élément x_j de $[n] \setminus \min(\pi_3)$ ($1 \leq j \leq i$), supposons que x_j apparaisse dans un bloc (non-singleton) C_j de π_3 , alors, on place $-x_j$ dans le bloc-zéro B_0 et x_j dans le bloc de (2.10) qui contient $\min(C_j)$. Remarquons que nous devons montrer que $\min(C_j) \in \min(\pi_1) \cap \min(\pi_3)$ pour garantir l'existence d'un tel bloc dans (2.10). En effet, si $\min(C_j) \notin \min(\pi_1)$, alors, par la Définition 4, on aurait $\min(C_j) \in \text{Sing}(\pi_3)$. Dans l'exemple précédent, on place le nombre 4 dans le bloc qui contient 1.

- Pour tout élément y_j de $[n] \setminus \min(\pi_2)$ ($1 \leq j \leq n - k - i$), supposons que y_j apparaisse dans un bloc (non-singleton) D_j (resp. E_j) de π_2 (resp. π_1). Alors, on place $-p_j$ dans le bloc de (2.10) qui contient $\min(D_j)$ et on place p_j dans le bloc de (2.10) qui contient $\min(E_j)$ sauf si ce bloc contient déjà $-p_j$, dans le bloc zéro B_0 sinon. Dans l'exemple précédent, on place le nombre -3 dans le bloc qui contient 2, 5 dans le bloc qui contient 2, et 6 dans le bloc-zéro car le bloc qui contient 2 contient déjà -6 .

□

Puisque φ décrite dans la Remarque 3 envoie toute partition sur une quasi-permutation sous-diagonale, pour chaque triplet de partitions (π_1, π_2, π_3) satisfaisant les conditions du Théorème ??, on peut associer un triplet $(P_1, P_2, P_3) = (\varphi(\pi_1), \varphi(\pi_2), \varphi(\pi_3))$ de quasi-permutations sous-diagonales. Si \overline{P}_i désigne la quasi-permutation super-diagonale obtenue à partir de P_i en échangeant les coordonnées x et u , alors $(Q_1, Q_2) = (\overline{P}_1 \cup P_3, \overline{P}_2 \cup P_3)$ est un couple de quasi-permutations à simples équerres satisfaisant les conditions du Théorème 4. Ainsi, on obtient une bijection entre les k -partitions signées et les couples de quasi-permutations à simples équerres.

Par exemple, pour la 3-partition signée de $[\pm 10]_0$ π dans (2.8), le couple de quasi-permutations à simples équerres (Q_1, Q_2) is donnée par (2.6) (cf. Figure 2).

3. LES NOMBRES DE JACOBI-STIRLING DE PREMIÈRE ESPÈCE $js_n^k(z)$

Pour une permutation σ de $[n]_0 := [n] \cup \{0\}$ (resp. $[n]$) et pour $j \in [n]_0$ (resp. $[n]$), on notera $\text{Orb}_\sigma(j) = \{\sigma^\ell(j) : \ell \geq 1\}$ l'orbite de j et $\min(\sigma)$ l'ensemble des minima de cycles, i.e.,

$$\min(\sigma) = \{j \in [n] : j = \min(\text{Orb}_\sigma(j) \cap [n])\}.$$

Définition 5. Étant donné un mot $w = w(1) \dots w(\ell)$ sur l'alphabet fini $[n]$, une lettre $w(j)$ est un *minimum à gauche* de w si $w(k) > w(j)$ pour tout $k \in \{1, \dots, j-1\}$. On définit $\text{rec}(w)$ comme le nombre de minimums à gauche de w et $\text{rec}_0(w) = \text{rec}(w) - 1$.

Par exemple, si $w = \mathbf{574862319}$, alors les minimums à gauche sont 5, 4, 2, 1. Ainsi $\text{rec}(w) = 4$.

Théorème 7. *L'entier $b_{n,k}^{(i)}$ est le nombre de couples (σ, τ) tels que σ (resp. τ) est une permutation de $[n]_0$ (resp. $[n]$) en k cycles, satisfaisant les conditions :*

- i) $1 \in \text{Orb}_\sigma(0)$,
- ii) $\min \sigma = \min \tau$,
- iii) $\text{rec}_0(w) = i$, où $w = \sigma(0) \dots \sigma^l(0)$ avec $\sigma^{l+1}(0) = 0$.

Démonstration. Soit $\mathcal{E}_{n,k}^{(i)}$ l'ensemble des couples (σ, τ) satisfaisant les conditions du Théorème 7 et notons $e_{n,k}^{(i)} = |\mathcal{E}_{n,k}^{(i)}|$. On partitionne $\mathcal{E}_{n,k}^{(i)}$ en trois groupes :

- (i) les couples (σ, τ) tels que $\sigma^{-1}(n) = n$. Alors n forme un cycle dans les partitions σ et τ ; il y a alors clairement $e_{n-1,k-1}^{(i)}$ possibilités.
- (ii) les couples (σ, τ) tels que $\sigma^{-1}(n) = 0$. On peut construire de tels couples en choisissant d'abord un couple (σ', τ') dans $\mathcal{E}_{n-1,k}^{(i-1)}$ et en insérant ensuite n in σ' comme image de 0 (resp. dans τ'). Clairement, il y a $(n-1)e_{n-1,k}^{(i-1)}$ possibilités.

- (iii) les couples (σ, τ) tels que $\sigma^{-1}(n) \notin \{0, n\}$. On peut construire de tels couples en choisissant d'abord un couple (σ', τ') dans $\mathcal{E}_{n-1, k}^{(i)}$ et en insérant ensuite n dans σ' (resp. dans τ'). Clairement, il y a $(n-1)^2 e_{n-1, k}^{(i)}$ possibilités.

En résumé, on obtient l'équation suivante :

$$e_{n, k}^{(i)} = e_{n-1, k-1}^{(i)} + (n-1)e_{n-1, k}^{(i-1)} + (n-1)^2 e_{n-1, k}^{(i)}. \quad (3.1)$$

D'après (1.5), il est facile de voir que les coefficients $b_{n, k}^{(i)}$ satisfont à la même récurrence. \square

On montre à présent comment déduire des Théorèmes 1 et 7 les interprétations combinatoires des nombres $|\text{ls}(n, k)|$, $|s(n, k)|$ et $|u(n, k)|$.

Corollaire 8. L'entier $|\text{ls}(n, k)|$ est le nombre de couples (σ, τ) tels que σ (resp. τ) est une permutation de $[n]_0$ (resp. $[n]$) en k cycles, satisfaisant $1 \in \text{Orb}_\sigma(0)$ et $\min \sigma = \min \tau$.

Corollaire 9. L'entier $|s(n, k)|$ est le nombre de permutations de $[n]$ en k cycles.

Démonstration. Par le Théorème 7, l'entier $|s(n, k)|$ est le nombre de couples (σ, τ) de $\mathcal{E}_{n, k}^{(n-k)}$. Puisque σ et τ ont toutes deux k cycles et même minima de cycles, la permutation σ est entièrement déterminée par τ car $\text{Orb}_\sigma(1)$ est le seul cycle non-singleton, de cardinal $n-k+2$; de plus, les $n-k$ éléments de ce cycle différents de 0 et 1 sont exactement les éléments de $[n] \setminus \min \tau$ rangés dans l'ordre décroissant dans le mot $w = \sigma(0)\sigma^2(0) \dots 1$ avec $\sigma(1) = 0$. \square

Le résultat ci-dessous est l'interprétation analogue au Corollaire 3 pour les nombres factoriels centraux de première espèce. Cette analogie est comparable à celle des nombres de Stirling de première espèce $|s(n, k)|$ versus les nombres de Stirling de seconde espèce $|S(n, k)|$.

Corollaire 10. L'entier $|u(n, k)|$ est le nombre de couples $(\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_n^2$ en k cycles, tels que $\min(\sigma) = \min(\tau)$.

En effet, l'entier $|u(n, k)|$ est le nombre de couples (σ, τ) de $\mathcal{E}_{n, k}^{(0)}$. Le Théorème 7 implique que $\sigma^{-1}(1) = 0$. Le résultat suit alors en effaçant le zéro dans σ .

Remarque 5. En faisant la substitution $i \rightarrow n+1-i$, on peut déduire que le nombre $|u(n, k)|$ est également le nombre de couples (σ, τ) de \mathcal{S}_n^2 en k cycles, tels que $\max(\sigma) = \max(\tau)$, où $\max(\sigma)$ désigne l'ensembles des maxima de cycles de σ , i.e.,

$$\max(\sigma) = \{j \in [n] : j = \max(\text{Orb}_\sigma(j))\}.$$

4. QUELQUES AUTRES RÉSULTATS

4.1. Nombres factoriels centraux d'indices impairs. Pour tous $n, k \geq 0$, posons

$$V(n, k) = 4^{n-k} T(2n+1, 2k+1), \quad v(n, k) = 4^{n-k} t(2n+1, 2k+1).$$

On peut remarque que ces nombres sont également des entiers (voir Table 4). Par définition, nous avons les relations de récurrence suivantes :

$$V(n, k) = V(n-1, k-1) + (2k+1)^2 V(n-1, k), \quad (4.1)$$

$$v(n, k) = v(n-1, k-1) - (2n-1)^2 v(n-1, k). \quad (4.2)$$

TABLE 4. Les premières valeurs de $V(n, k)$ et $|v(n, k)|$

$k \setminus n$	0	1	2	3	4	5	$k \setminus n$	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	9	225	11025	893025
1		1	10	91	820	7381	1		1	10	259	12916	1057221
2			1	35	966	24970	2			1	35	1974	172810
3				1	84	5082	3				1	84	8778
4					1	165	4					1	165
5						1	5						1

Une question naturelle est alors de donner une interprétation combinatoire pour ces nombres. On peut facilement en trouver une en utilisant la théorie des fonctions génératrices.

Theorème 8. *L'entier $V(n, k)$ est le nombre de partitions de $[2n + 1]$ en $2k + 1$ blocs de cardinal impair.*

Démonstration. Cela provient de la fonction génératrice connue (voir [8, p. 214]) :

$$\sum_{n, k \geq 0} V(n, k) t^k \frac{x^n}{n!} = \sinh(t \sinh(x)),$$

et de la théorie combinatoire classique des fonctions génératrices (voir [7, Chp. 3] et [9, Chp. 5]). \square

Pour interpréter l'entier $|v(n, k)|$, nous avons besoin d'introduire la définition suivante.

Définition 6. Un (n, k) -complexe de Riordan est un $(2k + 1)$ -uplet

$$((B_1, \sigma_1, \tau_1), \dots, (B_{2k+1}, \sigma_{2k+1}, \tau_{2k+1}))$$

tel que

- i) $\{B_1, \dots, B_{2k+1}\}$ est une partition de $[2n+1]$ en blocs B_i de cardinaux impairs ;
- ii) σ_i et τ_i ($1 \leq i \leq 2k+1$) sont des involutions sans points fixes sur $B_i \setminus \max(B_i)$.

Theorème 9. *L'entier $|v(n, k)|$ est le nombre de (n, k) -complexes de Riordan.*

Démonstration. Il est connu que (voir [8, p. 214]) :

$$\sum_{n, k \geq 0} |v(n, k)| t^k \frac{x^n}{n!} = \sinh(t \arcsin(x)),$$

et

$$\arcsin(x) = \sum_{n \geq 0} ((2n - 1)!!)^2 \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!},$$

où $(2n - 1)!! = (2n - 1)(2n - 3) \cdots 3 \cdot 1$. Puisque $(2n - 1)!!$ est le nombre d'involutions sans points fixes sur $[2n]$ (voir [2]), l'entier $((2n - 1)!!)^2$ est le nombre de couples d'involutions sans points fixes sur $[2n + 1] \setminus \{2n + 1\}$.

On définit les nombres $J(n, m)$ par :

$$\exp \left(t \sum_{n \geq 1} ((2n - 1)!!)^2 \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!} \right) = \sum_{n, m \geq 0} J(2n + 1, m) \frac{t^m}{m!} \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!}.$$

Alors, d'après la théorie des fonctions génératrices exponentielles (voir [7, Chp. 3] et [9, Chp. 5]), le coefficient $J(2n + 1, m)$ est le nombre de m -uplets

$$(B_1, \sigma_1, \tau_1), \dots, (B_m, \sigma_m, \tau_m);$$

où $\{B_1, \dots, B_m\}$ est une partition de $[2n + 1]$ avec $|B_i|$ impair ($1 \leq i \leq m$), et où σ_i et τ_i sont des involutions sans points fixes sur $B_i \setminus \max(B_i)$. Puisque $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$, on a $|v(n, m)| = J(2n + 1, 2k + 1)$ si $m = 2k + 1$, et $|v(n, m)| = 0$ si m est pair. \square

Remarque 6. De (??), on peut facilement déduire que

$$\sum_{k=0}^n |v(n, k)| t^{2k+1} = t(t^2 + 1)(t^2 + 3^2) \dots (t^2 + (2n - 1)^2) \quad (4.3)$$

Il est intéressant de remarquer qu'une preuve du résultat précédent n'est pas évidente à partir de (4.3). De même, des preuves des Théorèmes 8 et 9 en utilisant les formules de récurrence (4.1) ou (4.2) ne sont pas évidentes.

Exemple 1. Il y a dix $(2, 1)$ -complexes de Riordan. Puisque les nombres n et k sont petits, les involutions impliquées sont des transpositions identiques.

$$\begin{aligned} & \{1\}, \{(2, 3), 4\}, \{5\}, \quad \{1\}, \{2\}, \{(3, 4), 5\}, \\ & \{(1, 2), 3\}, \{4\}, \{5\}, \quad \{(1, 2), 5\}, \{3\}, \{4\}, \\ & \{(1, 3), 4\}, \{2\}, \{5\}, \quad \{(1, 3), 5\}, \{2\}, \{4\}, \\ & \{(1, 2), 4\}, \{3\}, \{5\}, \quad \{(1, 4), 5\}, \{2\}, \{3\}, \\ & \{1\}, \{(2, 3), 5\}, \{4\}, \quad \{1\}, \{(2, 4), 5\}, \{3\}, \end{aligned}$$

où $\{1\}, \{(2, 3), 4\}, \{5\}$ signifie que $\pi = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5\}\}$, et $\sigma = \tau = 13245$.

4.2. Fonctions génératrices. Dans [5], les auteurs ont réalisé de longs calculs pour déduire une formule explicite pour les nombres de Jacobi-Stirling. En fait, on peut déduire une formule explicite pour les nombres de Jacobi-Stirling directement à partir de la formule d'interpolation de Newton :

$$x^n = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{r=0}^j \frac{x_r^n}{\prod_{k \neq i} (x_r - x_k)} \right) \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i). \quad (4.4)$$

En effet, en faisant les substitutions $x \rightarrow m(z + m)$ et $x_i \rightarrow i(z + i)$ dans (4.4), on obtient

$$(m(m + z))^n = \sum_{j=0}^n \text{JS}_n^j(z) (m - j + 1)_j (z + m)_j, \quad (4.5)$$

où

$$\text{JS}_n^j(z) = \sum_{r=0}^j (-1)^r \frac{[r(r + z)]^n}{r!(j - r)!(z + r)_r (z + 2r + 1)_{j-r}}, \quad (4.6)$$

et $(z)_n = z(z + 1) \dots (z + n - 1)$.

Remarque 7. Si on substitue x par $m(m + z) + k$, on obtient [5, Theorem 4.1].

À partir de la récurrence (1.4), on déduit :

$$\sum_{n \geq k} JS_n^k(z)x^n = \frac{x}{1 - k(k+z)} \sum_{n \geq k-1} JS_n^{k-1}(z)x^n; \quad (4.7)$$

par conséquent,

$$\sum_{n \geq k} JS_n^k(z)x^n = \frac{x^k}{(1 - (z+1)x)(1 - 2(z+2)x) \dots (1 - k(z+k)x)}. \quad (4.8)$$

REMERCIEMENTS

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-08-BLAN-0243-03.

RÉFÉRENCES

1. G. E. Andrews, L. L. Littlejohn, *A combinatorial interpretation of the Legendre-Stirling numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 2581-2590.
2. L. Comtet, *Advanced combinatorics*, Boston, Dordrecht, 1974.
3. D. Dumont, *Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi*, Duke math. J., t. 41, 1974, p. 305-318.
4. W. N. Everitt, L. L. Littlejohn, R. Wellman, *Legendre polynomials, Legendre-Stirling numbers, and the left-definite spectral analysis of the Legendre differential expression*, J. Comput. Appl. Math., 148 (2002), 213-238.
5. W. N. Everitt, K. H. Kwon, L. L. Littlejohn, R. Wellman, G. J. Yoon, *Jacobi-Stirling numbers, Jacobi polynomials, and the left-definite analysis of the classical Jacobi differential expression*, J. Comput. Appl. Math., 208 (2007), 29-56.
6. Dominique Foata, Guo-Niu Han, *Principes de combinatoire classique*, Lecture notes, Strasbourg, 2000, revised 2008.
7. D. Foata, M. P. Schützenberger, *Théorie géométrique des polynômes eulériens*, Lecture Notes in Math no. 138, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
8. J. Riordan, *Combinatorial Identities*, John Wiley & Sons, Inc., 1968.
9. R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol.2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 62, 1999.

UNIVERSITÉ DE LYON, UNIVERSITÉ LYON 1, INSTITUT CAMILLE JORDAN, UMR 5208 DU CNRS, 43, BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918, F-69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE
E-mail address: gelineau@math.univ-lyon1.fr
URL: <http://math.univ-lyon1.fr/~gelineau/>

UNIVERSITÉ DE LYON, UNIVERSITÉ LYON 1, INSTITUT CAMILLE JORDAN, UMR 5208 DU CNRS, 43, BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918, F-69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE
E-mail address: zeng@math.univ-lyon1.fr
URL: <http://math.univ-lyon1.fr/~zeng/>