Déterminants

Université Claude Bernard–Lyon I
L1 de Mathématiques : Math. II Algèbre (cursus PMI)
Année 2010–2011

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps. On va associer à toute matrice carrée, et même à tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, un scalaire appelé *déterminant*, ce qui va donner :
– un critère numérique pour l'inversibilité d'une matrice ou d'un endomorphisme,
– des formules pour résoudre les systèmes linéaires,
– un cadre pour parler de l'orientation d'un espace vectoriel réel,
– un outil pour mesurer les aires et les volumes,
et, plus tard,
– un invariant plus fin d'un endomorphisme appelé *polynôme caractéristique*, qui contrôle dans une large mesure le comportement de l'endomorphisme,
– un outil pour les changements de variables dans les intégrales multiples,
– etc.

Notation : Pour n entier naturel non nul, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, par I_n la matrice identité de taille $n \times n$, par ${}^tA$ la transposée d'une matrice A.

I Le cas de la dimension 2

II Construction du déterminant

1° Formes multilinéaires alternées

Soit n un entier naturel non nul et E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. Une fonction

$$\Delta : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

est dite
– multilinéaire si pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$ et toute famille $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ de E^{n-1}, l'application

$$\Delta_i : E \to \mathbb{K}, \quad v \mapsto \Delta(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

est linéaire ;
– alternée si elle s'annule lorsque deux variables sont égales : pour tout couple $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ d'entiers distincts, disons $i < j$, et pour toute famille $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$, on a :

$$v_i = v_j \implies \Delta(v_1, \ldots, v_n) = 0.$$

Antisymétrie d'une forme alternée

Proposition *Une forme multilinéaire alternée est antisymétrique : si $\Delta : E^n \to \mathbb{K}$ est multilinéaire et alternée alors, si on permute deux variables, la valeur de Δ est multipliée par -1.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que si $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$ et si $1 \leq i < j \leq n$, on a :

$$\Delta(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -\Delta(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n).$$

Fixons une fois pour toutes les v_k pour $k \notin \{i, j\}$. On introduit la fonction :

$$\overline{\Delta} : E^2 \to \mathbb{K}, \quad (v_i, v_j) \mapsto \Delta(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n).$$

Puisque Δ est multilinéaire alternée, on a pour tout $(v_i, v_j) \in E^2$:

$$0 = \overline{\Delta}(v_i + v_j, v_i + v_j) = \overline{\Delta}(v_i, v_i) + \overline{\Delta}(v_i, v_j) + \overline{\Delta}(v_j, v_i) + \overline{\Delta}(v_j, v_j) = \overline{\Delta}(v_i, v_j) + \overline{\Delta}(v_j, v_i).$$

Il en résulte que $\overline{\Delta}(v_i, v_j) = -\overline{\Delta}(v_j, v_i)$, comme annoncé.

Unicité à scalaire près

Proposition *À multiplication par un scalaire près, il existe au plus une forme multilinéaire alternée sur un espace de dimension n.*

Démonstration. Dans cette proposition, on suppose qu'il existe une forme multilinéaire alternée Δ_0 qui n'est pas partout nulle. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs telle que

$$\Delta_0(e_1, \dots, e_n) \neq 0.$$

On doit montrer que pour Δ multilinéaire alternée, il existe un scalaire C tel que $\Delta = C\,\Delta_0$. Commençons par montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Si la famille est liée, c'est que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres : il existe i et des scalaires $(\alpha_j)_{j \neq i}$ tels que

$$e_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j e_j.$$

En remplaçant e_i par cette expression, on obtient par multilinéarité par rapport à la i^{e} variable :

$$\Delta_0(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) = \sum_{j \neq i} \alpha_j \Delta_0(e_1, \dots, \underbrace{e_j}_{i^{\text{e}} \text{ position}}, \dots, e_n).$$

Mais dans le j^{e} terme de cette somme, le vecteur e_j apparaît deux fois (une en j^{e} position et une en i^{e} position) donc le terme s'annule puisque Δ_0 est alternée. La somme est donc nulle, contrairement à l'hypothèse initiale.
À présent, soit Δ une forme multilinéaire alternée. Soit $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$. On peut exprimer les v_j dans la base (e_i), ce qui donne une matrice (a_{ij}) telle que :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i.$$

Grâce à la multilinéarité de Δ, on peut écrire :

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) = \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} e_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{in} e_i\right) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \Delta(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}).$$

Dans ce développement, on choisit le i_1-ème terme de la première somme, le i_2-ème de la deuxième somme, etc. Le choix de $(i_1, \dots, i_n)$ détermine une application $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, $k \mapsto i_k$. On peut écrire :

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n)n}\, \Delta(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

Comme Δ est alternée, $\Delta(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ est nul, à moins que $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ ne soient distincts, i.e. que σ soit injective. Vu que les ensembles de départ et d'arrivée coïncident, injectivité et bijectivité sont synonymes.

Notons $\mathfrak{S}_n$ le groupe des bijections de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même. On a montré :

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n)n} \, \Delta(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}).$$

Si on réordonne les vecteurs $e_{\sigma(i)}$ par des transposition en utilisant l'antisymétrie de Δ (informellement, on permute $e_{\sigma(n)}$ et $e_{\sigma(k)}$ où k est l'antécédent de n par σ, ce qui met e_n en dernière position, puis on recommence avec les $n-1$ premiers vecteurs), on se convainc que

$$\Delta(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \, \Delta(e_1, \ldots, e_n),$$

où $\varepsilon(\sigma)$ est un élément de $\{-1, 1\}$ qui ne dépend que de σ et pas de Δ ni des $(e_1, \ldots, e_n)$. Ainsi :

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \, a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n)n} \, \Delta(e_1, \ldots, e_n).$$

Posons

$$C = \Delta(e_1, \ldots, e_n) / \Delta_0(e_1, \ldots, e_n),$$

Le calcul précédent est valable en particulier si $\Delta = \Delta_0$, il vient donc :

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = C \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \, a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n)n} \, \Delta_0(e_1, \ldots, e_n) = C \, \Delta_0(v_1, \ldots, v_n).$$

Remarque. On peut démontrer que $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupes et utiliser la formule ci-dessus pour définir le déterminant. C'est même l'approche classique. Mais on va en utiliser une autre qui semble légèrement plus concrète.

2° Définition du déterminant par récurrence

Formes multilinéaires alternées et matrices

On s'intéresse principalement au cas où $E = \mathbb{K}^n$, que l'on interprète comme l'espace des matrices-colonnes. On peut identifier E^n avec l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées par l'application

$$(\mathbb{K}^n)^n \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \longmapsto [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n],$$

où on note $[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice carrée dont les colonnes sont $\mathbf{a}_1 = (a_{i,1})_{1 \leq i \leq n}, \ldots,$ $\mathbf{a}_n = (a_{i,n})_{1 \leq i \leq n}$.
Ainsi, une application $\Delta : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$ s'identifie à une application $\Delta : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$; on dit qu'elle est multilinéaire par rapport aux colonnes si le déterminant dépend linéairement de chaque colonne lorsque les autres sont fixés ; plus formellement, pour tout entier j et toutes colonnes $\mathbf{a}_k$, $k \neq j$, l'application $\Delta_j : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\mathbf{a} \mapsto \Delta([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n])$ est linéaire.

Mineurs d'une matrice

Soit n un entier naturel non nul et A une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour i et j, entiers compris entre 1 et n, on note A_{ij} la sous-matrice de A de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la i^{e} ligne et la j^{e} colonne de A : si $A = (a_{ij})$, on a :

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K}).$$

Définition
On définit une famille d'applications

$$\det = \det_n : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

par récurrence sur l'entier naturel n. Pour $n = 1$, on pose :

$$\forall (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K}), \quad \det((a)) = a.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons avoir défini $\det : \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. On pose alors, pour A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{1j} \det A_{1j}.$$

Exemples
Pour $n = 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}),$$

on a $A_{11} = (d)$ et $A_{12} = (c)$, si bien que

$$\det A = ad - bc.$$

Pour $n = 3$ et $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on a :

$$\det A = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le déterminant d'une matrice 3×3 est donné par la *règle de Sarrus* :

$$\det \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \end{array} = \begin{array}{l} \boxed{\ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}} \\ \boxed{- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}} \end{array}$$

À présent, soit n quelconque. Supposons que $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit triangulaire inférieure, c'est-à-dire que $a_{ij} = 0$ si $1 \leq i < j \leq n$. Visuellement :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Alors le déterminant de A est le produit des coefficients diagonaux :

$$\det A = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

On le prouve par récurrence sur n. Pour $n = 1$, c'est évident. Soit $n \geq 2$, supposons que ce soit vrai pour les matrices de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Alors pour A comme ci-dessus, on a par définition :

$$\det A = a_{11} \det A_{11} + \sum_{j \geq 2} (-1)^{j-1} \times 0 \times \det A_{1j} = a_{11} \det A_{11},$$

ce qui permet de conclure la récurrence. En particulier, on a :

$$\det I_n = 1.$$

3° Le déterminant comme forme multilinéaire alternée

Proposition *Le déterminant est une forme multilinéaire et alternée par rapport aux colonnes.*

Démonstration. (Élémentaire mais technique, ne pas retenir.) On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$, c'est évident. Soit $n \geq 2$, on suppose la propriété vraie pour les matrices de dimension $(n-1) \times (n-1)$.
Montrons la multilinéarité par rapport aux colonnes en dimension n. Fixons j_0 entre 1 et n, étudions la linéarité du déterminant par rapport à la j_O-ème colonne de A. On a :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{1j} \det A_{1j}.$$

Soit j entre 1 et n. Si j est différent de j_0, a_{1j} ne dépend pas de la j_O-ème colonne de A ; d'un autre côté, la j_O-ème colonne de A, privée de son premier coefficient, est une colonne de A_{1j} et les autres n'en dépendent pas : par hypothèse de récurrence, il en résulte que $\det(A_{ij})$ dépend linéairement de la j_O-ème colonne de A, de même, par conséquent, que le j-ème terme de la somme.
Si j est égal à j_0, $\det(A_{1j_0})$ ne dépend pas de la j_O-ème colonne de A ; en revanche, a_{1j_0} en dépend linéairement. Il en résulte que le j_0-ème terme de la somme dépend linéairement de la j_O-ème colonne de A.
Montrons à présent que si deux colonnes sont égales, disons celles d'indices j_0 et j_1 avec $j_0 < j_1$, le déterminant s'annule. Soit j entre 1 et n. Si j est différent de j_0 et j_1, la matrice A_{1j} contient deux colonnes égales, celles qui proviennent des colonnes d'indices j_0 et j_1 de A : par suite, $\det(A_{1j})$ est nul et on a :

$$\det A = (-1)^{j_0-1} a_{1j_0} \det A_{1j_0} + (-1)^{j_1-1} a_{1j_1} \det A_{1j_1}.$$

En notant $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ les colonnes de A et $\breve{\mathbf{a}}_1, \ldots, \breve{\mathbf{a}}_n$ les colonnes privées de leur premier coefficient, on peut écrire :

$$A = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j_0}, \ldots, \mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_n],$$

d'où, puisque $\mathbf{a}_{j_0} = \mathbf{a}_{j_1}$:

$$\begin{cases} A_{1j_0} = [\breve{\mathbf{a}}_1, \ldots, \breve{\mathbf{a}}_{j_0-1}, \breve{\mathbf{a}}_{j_0+1}, \ldots, \breve{\mathbf{a}}_{j_1-1}, \breve{\mathbf{a}}_{j_0}, \breve{\mathbf{a}}_{j_1+1}, \ldots, \breve{\mathbf{a}}_n], \\ A_{1j_1} = [\breve{\mathbf{a}}_1, \ldots, \breve{\mathbf{a}}_{j_0-1}, \breve{\mathbf{a}}_{j_0}, \breve{\mathbf{a}}_{j_0+1}, \ldots, \breve{\mathbf{a}}_{j_1-1}, \breve{\mathbf{a}}_{j_1+1}, \ldots, \breve{\mathbf{a}}_n]. \end{cases}$$

On peut transformer A_{1j_1} en A_{1j_0} en permutant successivement les colonnes j_0 et j_0+1, puis j_0+1 et j_0+2,..., j_1-2 et j_1-1 : chacune de ces j_1-j_0-1 permutations change le signe du déterminant, ce qui prouve :

$$\det A_{1j_0} = (-1)^{j_1-j_0-1} \det A_{1j_1}.$$

En reportant dans la dernière expression de $\det(A)$ ci-dessus, on voit alors que $\det(A) = 0$.

III Propriétés essentielles

1° Caractérisation du déterminant

Comme le déterminant de l'identité est 1, on déduit des deux dernières propositions du paragraphe précédent la caractérisation suivante du déterminant.

Théorème *Le déterminant est l'unique forme multilinéaire et alternée par rapport aux colonnes qui prend la valeur* 1 *en la matrice-identité.*

2° Multiplicativité et applications

Propriété de multiplicativité (très importante)

Proposition *Le déterminant du produit de deux matrices est le produit des déterminants :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \det(AB) = \det(A)\ \det(B).$$

Mise en garde *Le déterminant de la somme* n'est pas*, en général, la somme des déterminants.*

Démonstration. (Ne pas retenir.) Fixons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il suffit de démontrer que l'application

$$\Delta : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad B \longmapsto \det(AB)$$

est multilinéaire et alternée par rapport aux colonnes. En effet, d'après le théorème, il existe alors un scalaire λ tel que $\Delta(B) = \lambda \det B$ pour tout B. Mais en prenant $B = I_n$, on voit que $\det A = \Delta(I_n) = \lambda$, ce qui prouve la proposition.
Montrons les propriétés de Δ annoncées. Notons $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ les colonnes de A : ce sont des éléments de $\mathbb{K}^n$. Pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, la j-ème colonne de AB est :

$$\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\mathbf{a}_k.$$

Fixons $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et notons $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ les colonnes de B. Soit $j_0 \in \{1, \dots, n\}$. On doit montrer que l'application

$$\delta_{j_0} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \quad \mathbf{b} \mapsto \Delta([\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{j_0-1}, \mathbf{b}, \mathbf{b}_{j_0+1}, \dot{;} \mathbf{b}_n])$$

est linéaire. Pour $(\mathbf{b}, \mathbf{b}') \in (\mathbb{K}^n)^2$ et $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$, notons $B_1 = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{j_0-1}, \lambda'\mathbf{b}' + \lambda''\mathbf{b}'', \mathbf{b}_{j_0+1}, \dot{;} \mathbf{b}_n]$. Pour calculer $\Delta(AB_1)$, remarquons que la j-ème colonne de AB_1 est la même que la j-ème colonne de AB. D'autre part, la j_0-ème colonne de AB_1 est :

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda' b'_{kj} + \lambda'' b''_{kj})\mathbf{a}_k = \lambda' \sum_{k=1}^{n} b'_{kj}\mathbf{a}_k + \lambda'' \sum_{k=1}^{n} b''_{kj}\mathbf{a}_k.$$

Par la multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes, il vient :

$$\delta_{j_0}(\lambda'\mathbf{b}' + \lambda''\mathbf{b}'') = \det(AB_1) = \lambda'\delta_{j_0}(\mathbf{b}') + \lambda''\delta_{j_0}(\mathbf{b}''),$$

ce qui prouve la multilinéarité de Δ par rapport aux colonnes.
Si B a deux colonnes égales, disons celles d'indices j et j', la formule ci-dessus montre que les colonnes d'indices j et j' de AB sont égales : en effet, on a $b_{kj} = b_{kj'}$ pour tout k. Il en résulte que $\Delta(B) = \det(AB) = 0$, ce qui exprime que Δ est alternée par rapport aux colonnes.

Application à l'inversibilité

Lemme *Le déterminant d'une matrice inversible n'est pas nul et le déterminant de son inverse est l'inverse du déterminant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A \text{ inversible} \implies \det A \neq 0 \text{ et } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Remarque. On verra plus loin que si son déterminant est non nul, une matrice est inversible.
Démonstration. Si A est inversible, la relation $I_n = AA^{-1}$ implique, par multiplicativité :

$$1 = \det(I_n) = \det(A)\ \det(A^{-1}),$$

d'où résulte le lemme.

Déterminant d'un endomorphisme

Lemme *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit φ un endomorphisme de E. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors le déterminant des matrices de φ dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont égaux.*

Démonstration. Notons n la dimension de E, A (resp. A') la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) et $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On sait que $A = PA'P^{-1}$. Le lemme résulte du calcul suivant :

$$\det A = \det(PA'P^{-1}) = \det P \, \det A' \, \det P^{-1} = \det P \, \det A' \, (\det P)^{-1} = \det A'.$$

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et φ un endomorphisme de E. Le déterminant de la matrice de φ dans une base de E ne dépend que de φ et pas de la base dans laquelle la matrice est écrite. Ce nombre est appelé déterminant de φ et noté $\det \varphi$.

3° Transposition et linéarité par rapport aux lignes

Comportement du déterminant par rapport aux lignes

Proposition *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le déterminant $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme multilinéaire alternée par rapport aux lignes.*

De même que ci-dessus, nous avons considéré une matrice comme une juxtaposition de colonnes, on peut aussi bien la considérer comme un empilement de lignes. Plus précisément, pour $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n$ des matrices-lignes, i.e. des éléments de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, on note $\{\mathbf{l}_1/\mathbf{l}_2/\cdots/\mathbf{l}_n\}$ la matrice dont les lignes sont $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n$. La proposition affirme que les applications

$$\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad \mathbf{l} \mapsto \det\{\mathbf{l}_1/\mathbf{l}_2/\cdots/\mathbf{l}_{i-1}/\mathbf{l}/\mathbf{l}_{i+1}/\cdots/\mathbf{l}_n\}$$

sont linéaires et, de plus, que le déterminant d'une matrice dont deux lignes sont égales est nul.

Démonstration. (Élémentaire mais technique, ne pas retenir.) On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Soit $n \geq 2$, supposons la propriété démontrée en dimension $n - 1$. Prouvons-la en dimension n.
Pour la linéarité par rapport à la i^{e} ligne, on distingue deux cas. Pour $i = 1$, on constate que les mineurs $\det(A_{1j})$ ne dépendent pas de la première ligne de A, alors que le coefficient a_{1j} en dépend linéairement. Pour $i \geq 2$, on constate que a_{1j} ne dépend pas de la i^{e} ligne de A et que, par hypothèse de récurrence, $\det A_{1j}$ dépend de linéairement de la $(i-1)^{\text{e}}$ ligne de A_{1j}, qui est la i^{e} ligne de A privée de son j^{e} coefficient. Dans les deux cas, $a_{1j} \det A_{1j}$ dépend linéairement de la i^{e} ligne de A, donc $\det(A)$.
Supposons que deux lignes de A soient égales, disons celles d'indice i_0 et i_1 avec $i_0 < i_1$. Si $2 \leq i_0 < i_1$, les lignes d'indice $(i_0 - 1)$ et $(i_1 - 1)$ de chaque sous-matrice A_{1j} sont égales donc, par hypothèse de récurrence, le mineur $\det A_{1j}$ est nul.
Supposons $i_0 = 1$. Quitte à permuter les lignes d'indices 2 et i_1 de A, ce qui a pour effet de permuter les lignes d'indices 1 et $i_1 - 1$ de chaque A_{1j}, donc, par hypothèse de récurrence, de multiplier le déterminant par -1, on peut supposer que $i_1 = 2$. On calcule alors $\det A_{1j}$ en utilisant la définition.
Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. On va naturellement noter $A_{12,jk}$ la matrice $(n-2) \times (n-2)$ obtenue de A en supprimant les deux premières lignes et les colonnes d'indices j et k. En prenant garde que pour $k > j$, le coefficient a_{2k} de A_{1j} est dans la $(k-1)^{\text{e}}$ colonne de A_{1j}, on calcule :

$$\det A_{1,j} = \sum_{k<j} (-1)^{k-1} a_{2,k} \det A_{12,kj} + \sum_{k>j} (-1)^{k-2} a_{2k} \det A_{12,jk}.$$

En sommant sur j et en réordonnant sur les couples $j < k$, on trouve :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{1j} \det A_{1,j} = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left((-1)^{j-1+k-1} a_{1j} a_{2k} + (-1)^{j-1+k-2} a_{1k} a_{2j} \right).$$

En tenant compte de ce que les deux premières lignes sont égales, c'est-à-dire que $a_{1k} = a_{2k}$ pour tout k (et $a_{1j} = a_{2j}$ pour tout j, si on veut...), on voit que chaque terme de la somme s'annule, donc le déterminant de A est nul.

Invariance du déterminant par transposition

Proposition *Le déterminant d'une matrice et de sa transposée sont égaux :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det({}^t A) = \det A.$$

Démonstration. Puisque la transposition échange lignes et colonnes et que le déterminant est multilinéaire alterné par rapport aux lignes, l'application $\Delta : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto \det({}^t A)$ est multilinéaire alternée par rapport aux colonnes. Comme de plus, Δ prend la valeur 1 en I_n, c'est que Δ est le déterminant.

4° Comatrice et expression de l'inverse

Les formules de développement selon une rangée peuvent s'exprimer de façon très compacte en utilisant la notion de comatrice, ce qui donne des formules très utiles par ailleurs.

Définition de la comatrice

Pour n entier naturel non nul et $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la comatrice de A est la matrice notée $\mathrm{com}(A) = (c_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \quad c_{ij} = (-1)^{i+j} \, a_{ij} \, \det A_{ij}.$$

Remarquons que les signes sont donnés par la matrice « damier » que voici :

$$\left((-1)^{i+j}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots & & \\ - & + & - & + & \cdots & & \\ + & - & + & - & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & + & - \\ & & & \cdots & - & + \end{pmatrix}.$$

Propriété de la comatrice

Proposition *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :*

$$A \, {}^t\mathrm{com}(A) = \det(A) \, I_n = {}^t\mathrm{com}(A) \, A.$$

Démonstration. On ne montre que la première égalité, l'autre résulte de considérations analogues en remplaçant les lignes par les colonnes. On note $D = (d_{ij})$ la transposée de la comatrice de A : pour i et k entiers compris entre 1 et n, on a : $d_{ki} = c_{ik}$. D'autre part, on pose $B = AD$. Pour $(i, i') \in \{1, \dots, n\}^2$, le coefficient d'indice (i, i') de B est :

$$b_{ii'} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_{ki'} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i'+k} a_{ik} \det A_{i'k}.$$

Fixons $i \in \{1, \dots, n\}$. On a :

$$b_{ii} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \det A$$

car on reconnaît le développement du déterminant de A selon la i^{e} ligne !
À présent, soit $i \neq i'$. On a :

$$b_{ii'} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i'+j} a_{ij} \det A_{i'j}.$$

On reconnaît là le développement du déterminant selon la i'-ème de la matrice A' obtenue en remplaçant la i'-ème de A par la i-ème ligne de A :

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i'-1,1} & \cdots & \cdots & a_{i'-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i'+1,1} & \cdots & \cdots & a_{i'+1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Comme A' a deux lignes égales, celles d'indices i et i', on a bien :

$$b_{ii'} = \det A' = 0.$$

Expression de l'inverse

Proposition *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si, et seulement si son déterminant* $\det(A)$ *n'est pas nul. Dans ce cas, on a :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \, {}^t\mathrm{com}(A).$$