Université Lyon 1
L3 Mathématiques

Géométrie élémentaire
Partiel du 15 novembre 2006
2 heures sans document

Problème

On considère l'espace affine $\mathbf{R}^3$.

Un triplet (D_1, D_2, D_3) de droites affines de $\mathbf{R}^3$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ est appelé un *triplexe* si
ι) $D_1 \cap D_2 = D_1 \cap D_3 = D_2 \cap D_3 = \emptyset$
$\iota\iota$) $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$.

Dans la Partie A, on se propose d'étudier l'opération du groupe des bijections affines $GA(\mathbf{R}^3)$ sur l'ensemble des triplexes de $\mathbf{R}^3$.

Dans ce qui suit, la direction d'un sous-espace affine $A \subset \mathbf{R}^3$ est notée $\overrightarrow{A}$.

Partie A

Question 1
Montrer que l'image $(f(D_1), f(D_2), f(D_3))$ de tout triplexe (D_1, D_2, D_3) par une bijection affine $f \in GA(\mathbf{R}^3)$ est un triplexe.

Question 2
Rappeler une condition nécessaire et suffisante pour que deux sous-espaces affines A et A' de $\mathbf{R}^3$ soient d'intersection non vide.

Question 3
Pour un triplexe (D_1, D_2, D_3) on désigne par $P_{i,j}, i < j$, le plan affine contenant D_i et de direction $\overrightarrow{P_{i,j}} = \overrightarrow{D_i} + \overrightarrow{D_j}$.

a) Montrer que D_1 coupe $P_{2,3}$ en un point a_1, que D_2 coupe $P_{1,3}$ en un point a_2 et que D_3 coupe $P_{1,2}$ en un point a_3.

b) Montrer qu'il existe trois vecteurs $\vec{v}_i \in \overrightarrow{D_i}, 1 \leq i \leq 3$, tels que

$$\overrightarrow{a_1 a_2} = \vec{v}_3, \quad \overrightarrow{a_1 a_3} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Montrer ensuite que $\vec{v}_i \neq \vec{0}$, $1 \leq i \leq 3$.
[Pour l'existence, observer qu'on a aussi $a_2 \in P_{2,3}$, $a_1 \in P_{1,3}$ et $a_1 \in P_{1,2}$.]

Pour la suite, on notera $\mathcal{R}_{(D_1,D_2,D_3)}$ la base affine $(a_1, a_1 + \vec{v}_1, a_1 + \vec{v}_2, a_1 + \vec{v}_3)$ ainsi construite.

Question 4

Soient (D'_1, D'_2, D'_3) un second triplexe, $P'_{i,j}, i < j$, (resp. a'_i) les plans (resp. les points d'intersection) définis comme à la question 3.

On suppose que f est une bijection affine telle que $f(D_i) = D'_i, 1 \leq i \leq 3$.

a) Montrer que $f(P_{i,j}) = P'_{i,j}$.

b) Montrer que $f(a_i) = a'_i, 1 \leq i \leq 3$, et ensuite que $f(\mathcal{R}_{(D_1,D_2,D_3)}) = \mathcal{R}_{(D'_1,D'_2,D'_3)}$.

[Pour les repères, calculer $L_f(\overrightarrow{a_1a_2})$ et $L_f(\overrightarrow{a_1a_3})$.]

c) En déduire qu'il existe au plus une bijection affine f telle que $f(D_i) = D'_i, 1 \leq i \leq 3$.

Question 5

a) En conclusion, montrer que l'opération

$$\phi : GA(\mathbf{R}^3) \times \mathcal{T} \to \mathcal{T} : (D, D', D'') \mapsto (f(D), f(D'), f(D''))$$

du groupe affine sur l'ensemble $\mathcal{T}$ des triplexes est transitive et simple.

b) Peut-on aussi conclure qu'il en est de même pour tout espace affine réel de dimension 3? *[Justifier votre réponse.]*

Partie B

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

On considère le cube $C = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq 3\}$. Pour la suite du problème, on fixe un triplexe de référence $(D_i)_{1 \leq i \leq 3}$ en choisissant trois arêtes du cube C comme suit:

D_1 est la droite affine passant par $(0, 0, 1)$ et dirigée par $\vec{e}_1$
D_2 est la droite affine passant par $(1, 0, 0)$ et dirigée par $\vec{e}_2$
D_3 est la droite affine passant par $(0, 1, 0)$ et dirigée par $\vec{e}_3$

Question 1

Faire une figure.

On se propose dans cette partie d'étudier l'ensemble des bijections affines qui stabilisent la réunion $T = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ des droites du triplexe de référence (D_1, D_2, D_3).

Question 2

a) Montrer que l'ensemble G_T des bijections affines $f \in GA(\mathbf{R}^3)$ telles que $f(T) = T$ est un sous-groupe du groupe affine $GA(\mathbf{R}^3)$.

b) Montrer que si $f \in G_T$, alors quel que soit $i \in \{1,2,3\}$, il existe $j \in \{1,2,3\}$ tel que $f(D_i) = D_j$.

c) En déduire, à l'aide de la partie A, que le groupe G_T est isomorphe au groupe des permutations de l'ensemble $\{D_1, D_2, D_3\}$. *[On demande une argumentation claire.]*

Hors Barème

Question 3

a) Soit $f \in G_T$ l' application telle que $f(D_1) = D_2$, $f(D_2) = D_1$ et $f(D_3) = D_3$.

Expliciter f à l'aide de la partie A.

Montrer ensuite que f stabilise l'ensemble des sommets du cube C.

On admettra que l'application $h \in G_T$ telle que $h(D_1) = D_1$, $h(D_2) = D_3$ et $h(D_3) = D_2$ stabilise aussi les sommets du cube.

b) Déduire de ce qui précède que toute bijection $k \in G_T$ stabilise l'ensemble des sommets du cube C et qu'il existe un point fixe $a^\star \in \mathbf{R}^3$ commun à tous les éléments de G_T que l'on déterminera.

Question 4 (Le cas général)

Soit maintenant (D, D', D'') un triplexe arbitraire de $\mathbf{R}^3$. En guise de conclusion, que peut-on dire du sous-groupe des bijections affines f telles que $f(D \cup D' \cup D'') = D \cup D' \cup D''$? *[Justifier votre réponse.]*