Université LYON 1

L3 Mathématiques

GEOMETRIE ELEMENTAIRE

Epreuve du 14 novembre 2007

Durée: 2 heures

Tout document et calculettes interdits

Exercice I

On se place dans l'espace affine $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire $(\ |\ )$ et de la distance euclidienne d usuels. On désigne par $C \subset \mathbf{R}^3$ un cube de longueur d'arêtes 1 et par D_i, $1 \leq i \leq 4$, les quatre diagonales principales de C passant par un sommet et le centre O de C :

On désigne par G_C l'ensemble des bijections affines f de $\mathbf{R}^3$ qui conservent

- la distance, i.e. telles que $d(s,t) = d(f(s), f(t))$ pour tout $s, t \in \mathbf{R}^3$,

- l'ensemble des sommets du cube C.

On pourra, le cas échéant, utiliser le fait que f conserve les distances si et seulement si L_f conserve le produit scalaire.

On note S_n, $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, le groupe des permutations. On rappelle que toute permutation est la composée d'un nombre fini de transpositions.

1) Montrer que G_C est un sous-groupe du groupe des bijections affines de $\mathbf{R}^3$.

2) a) Montrer que si $f \in G_C$ alors l'image par f d'une diagonale principale de C est une diagonale principale de C.
(On pourra utiliser la distance entre deux sommets.)

b) En déduire, en considérant l'action de $f \in G_C$ sur les diagonales principales de C, qu'il existe une application de restriction

$$\rho : G_C \longrightarrow S_4.$$

Montrer que ρ est un morphisme de groupes.
(On demande un argument clair et complet.)

3) a) Soit $1 \leq i < j \leq 4$. Décrire une symétrie affine $s_{ij} \in G_C$ telle que $f(D_i) = D_j$ et $f(D_k) = D_k$ pour $k \notin \{i, j\}$.

b) En déduire que le morphisme de restriction ρ est surjectif.

4) Soit σ l'homothétie de rapport -1 et de centre O.
a) Montrer que $\sigma \in G_C$.

b) Montrer que si $f \in G_C$ est telle que $f(D_i) = D_i$ pour tout $1 \leq i \leq 4$, alors f est une homothétie. En déduire que $f = Id$ ou $f = \sigma$.

c) On suppose que $f, f' \in G_C$ sont telles que $f(D_i) = f'(D_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Quelle relation y-a-t-il entre f et f'?

5) En conclusion, déterminer le cardinal du groupe G_C.
(Justifier votre réponse.)

Exercice II Soit (z_0, z_1, z_2, z_3) une base affine de $\mathbf{R}^3$, $[P] = [z_0, z_1, z_2, z_3]$ son enveloppe convexe et y_0, y_1, y_2, y_3 quatre points de $\mathbf{R}^3$.
1) On suppose que pour tout $j \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$y_j = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ b_{j,0} & b_{j,1} & b_{j,2} & b_{j,3} \end{pmatrix} \in [P] \setminus \{z_0\}.$$

a) Montrer que pour chaque $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ l'un au moins des coefficients $b_{j,1}, b_{j,2}, b_{j,3}$ est non nul.

b) Montrer que $z_0 \notin [y_0, y_1, y_2, y_3]$.
(On pourra procéder par l'absurde en supposant $z_0 \in [y_0, y_1, y_2, y_3]$ et en explicitant cette condition dans la base affine (z_0, z_1, z_2, z_3).)

2) Soit f une bijection affine de $\mathbf{R}^3$.
a) Quelle est l'image par f de l'enveloppe convexe $[P]$?

b) Utiliser la question 1) pour montrer que les conditions

$$f[P] = [P]$$

et

$$f(z_i) \in \{z_0, z_1, z_2, z_3\} \text{ pour tout } i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

sont équivalentes.

Exercice III On se place dans $\mathbf{R}^3$ muni de la base canonique $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. La direction d'une droite affine D est notée $\overrightarrow{D}$.
Soit $k \geq 3$ un entier. On dit qu'une famille $(\Delta_i)_{1 \leq i \leq k}$ de droites affines est en position générale si
- pour $i \neq j$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$
- pour tout triplet i, j, k d'entiers distincts, $\mathbf{R}^3 = \overrightarrow{\Delta}_i \oplus \overrightarrow{\Delta}_j \oplus \overrightarrow{\Delta}_k$.

On dit qu'une droite affine Δ est une *sécante* de la famille $(\Delta_i)_{1 \leq i \leq k}$ si $\Delta \cap \Delta_i$ est un singleton pour tout $1 \leq i \leq k$.

Sur le cube unité, on considère

- D_1 la droite affine passant par $(0,0,1)$ dirigée par $\vec{e}_1$,
- D_2 la droite affine passant par $(1,0,0)$ dirigée par $\vec{e}_2$,
- D_3 la droite affine passant par $(0,1,0)$ dirigée par $\vec{e}_3$.

Soit D_4 la droite affine passant par $(1,1,1)$ et dirigée par $\vec{e} = (1,-1,1)$.

1) a) Donner, dans le repère canonique $((0,0,0); B)$ un système d'équations cartésiennes pour chaque droite $D_i, 1 \leq i \leq 4$.

b) La famille $(D_i)_{1 \leq i \leq 4}$ est-elle en position générale?

2) Montrer, en les déterminant, que la famille $(D_i)_{1 \leq i \leq 4}$ admet exactement deux sécantes $\Delta_\pm$.

(On pourra écrire les points d'une sécante sous forme paramétrique $m(t) = (a,0,1) + t(u,v,w)$ *et demander qu'il existe* $t_i, 2 \leq i \leq 4$, *tels que* $m(t_i) \in D_i$.*)*

3) Donner *explicitement* une droite affine D_5 telle que $(D_i)_{1 \leq i \leq 5}$ soit en position générale et n'admette pas de sécante.