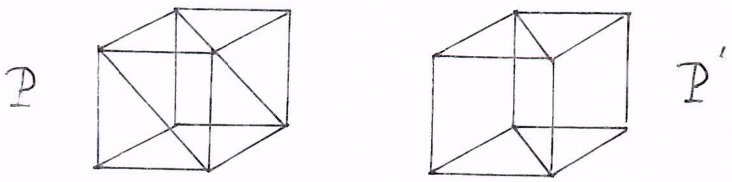
Corrigé du contrôle du 20 mars 2012

Dans le repère canonique $\mathcal{R}_0$, tout point $\mathbf{x} \in R^3$ s'écrit

$$\mathbf{x} = p_0 + x\,\overrightarrow{p_0p_1} + y\,\overrightarrow{p_0p_2} + z\,\overrightarrow{p_0p_3} = (x, y, z).$$

Q1. La droite D_1 passe par $p_3 = (0,0,1)$ et $(1,1,0)$. Pour définir un plan contenant D_1 il suffit de choisir un troisième point $\mathbf{x}$ n'appartenant pas à D_1.

Par exemple, le plan P contenant D_1 et $p_2 = (0,1,0)$ et le plan P' contenant D_1 et $p_0 = (0,0,0)$ conviennent:



L'équation d'un plan affine dans $\mathcal{R}_0$ est de la forme $ax + by + cz = d$.

P: $(0,0,1) \in P$ donne $c = d$, $(0,1,0) \in P$ donne $b = d$, $(1,1,0) \in P$ donne $a + b = d$. P est donc décrit par $y + z = 1$.

P': Comme pour P on a $c = d$, $a + b = d$, de plus $(0,0,0) \in P'$ donne $d = 0$. P' admet donc l'équation $x = y$.

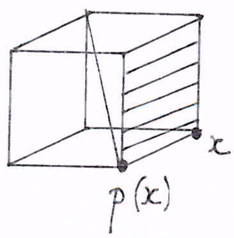
Conclusion: un système d'équations pour D_1 est $x - y = 0$, $y + z = 1$.

Q2.

i) La projection p.

Soit $\mathbf{P}$ le plan vectoriel d'équation $y = 0$. L'image $p(\mathbf{x})$ est l'unique point d'intersection de D_1 avec le plan affine $\mathbf{x} + \mathbf{P}$.

Voici une figure:



Par la projection p, on a $p_0 \mapsto p_3, p_1 \mapsto p_3, p_2 \mapsto (1,1,0), p_3 \mapsto p_3$. $\mathcal{R}_0$ étant repère, ces quatre images déterminent p et on a

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= p(p_0) + x(p(p_1) - p(p_0)) + y(p(p_2) - p(p_0)) + z(p(p_3) - p(p_0)) \\ &= (0,0,1) + y(1,1,-1) \\ &= (y, y, 1-y) \end{aligned}$$

Par le cours, on sait que l'image par une application affine f de l'enveloppe affine $\langle q_0, \ldots, q_r \rangle$ d'une famille de points $q_0, \ldots, q_r$ est l'enveloppe affine $\langle f(q_0), \ldots, f(q_r) \rangle$ des points images.

Pour déterminer l'image $p(D)$ d'une droite D il suffit dès lors de déterminer l'image de deux points $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ de D.

- Si $p(\mathbf{x}) \neq p(\mathbf{x}')$, $p(D)$ est l'unique droite passant par $p(\mathbf{x})$ et $p(\mathbf{x}')$.

- Si $p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}')$, $p(D) = \{p(\mathbf{x})\}$.

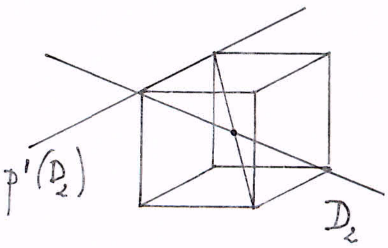
Par définition $p(D_1) = D_1$. Pour les trois autres, observer que le centre du cube o est commun aux quatres diagonales D_j et $p(o) = o$. Ensuite, l'image de tout sommet $s_j \in D_j \cap C$ est un sommet de $D_1 \cap C$. D'où $p(D_j) = D_1$, $1 \leq j \leq 4$.

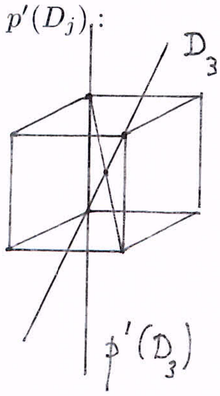
ii) La projection p'.

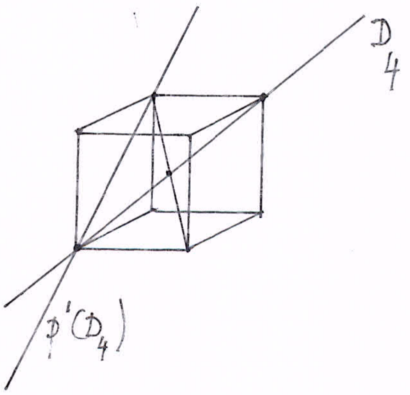
Notons $\mathbf{D}_1$ la direction de D_1. L'image $p'(\mathbf{x})$ est l'unique point d'intersection de la droite $\mathbf{x} + \mathbf{D}_1$ avec le plan P d'équation $y = 0$.

On a $p'(D_1) = \{p_3\}$. Pour déterminer les images $p'(D_j), j \geq 2$, on observe que la droite D_j passe par un sommet $\mathbf{x}_j$ du plan fixe P et par le centre o du cube. On a $p'(\mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_j$ et $p'(o) = p_3$ (car $o \in D_1$). Conclusion: pour $j \geq 2, p'(D_j) = \langle \mathbf{x}_j, p_3 \rangle$.

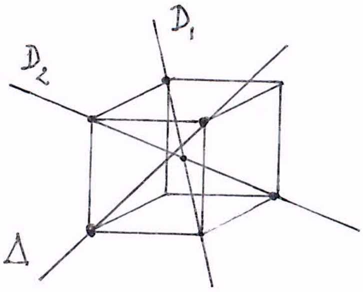
Voici une figure des images $p'(D_j)$:







Q3.



Le plan fixe de la symétrie s est l'unique plan contenant D_1 et D_2. La direction de s est celle de la diagonale faciale $\mathbf{\Delta}$ de la figure. L'image des sommets de $C \cap D_3$ montre que $s(D_3) = D_4$. Par s on a $p_0 \mapsto (0,1,1), p_1 \mapsto (1,1,1), p_2 \mapsto p_2, p_3 \mapsto p_3$ ce qui donne (comme pour p plus haut)

$$s(x,y,z) = (x, 1-z, 1-y).$$

Q4. On raisonne sur la distance entre sommets.

Chaque sommet du cube C est à distance 1 de 3 sommets, à distance $\sqrt{2}$ de 3 sommets et à distance $\sqrt{3}$ du sommet opposé sur la diagonale principale.

La condition d'isométrie $\sqrt{3} = d(s_j, s_j^-) = d(f(s_j), f(s_j^-))$ implique que $f(s_j)$ et $f(s_j^-)$ sont les 2 sommets d'une diagonale principale et donc

$$f(D_j) = f\langle s_j, s_j^- \rangle = \langle f(s_j), f(s_j^-) \rangle$$

est une diagonale principale.

Par l'égalité $f(D_i \cap D_j) = f(D_i) \cap f(D_j), i \neq j$, le centre o du cube (point d'intersection des diagonales principales) est un point fixe de f.

Q5.

$\overrightarrow{os_4} = \overrightarrow{os_1} + \overrightarrow{s_1s_4} = \overrightarrow{os_1} + \overrightarrow{s_2s_3} = \overrightarrow{os_1} - \overrightarrow{os_2} + \overrightarrow{os_3}$

Supposons $f(D_j) = D_j$, $1 \leq j \leq 4$. Les directions $\mathbf{D}_j$ des diagonales D_j sont alors conservées i.e. il existe des réels λ_j tels que

$$L_f(\overrightarrow{os_j}) = \lambda_j \overrightarrow{os_j}.$$

Dans le repère $\mathcal{R}$, l'égalité

$$L_f(\overrightarrow{os_4}) = L_f\overrightarrow{os_1} - L_f\overrightarrow{os_2} + L_f\overrightarrow{os_3}$$

s'écrit

$$\lambda_4(\overrightarrow{os_1} - \overrightarrow{os_2} + \overrightarrow{os_3}) = \lambda_1\overrightarrow{os_1} - \lambda_2\overrightarrow{os_2} + \lambda_3\overrightarrow{os_3}.$$

D'où,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4.$$

L_f est donc une homothétie vectorielle. f est donc une homothétie ou une translation. Comme elle admet un point fixe (le centre du cube) c'est une homothétie.

Par ce qui précède, si $f \neq id$ conserve les diagonales principales de C, c'est une homothétie de centre o (centre de C). On a donc

$$f(s_j) = o + \lambda\,\overrightarrow{os_j}, \quad 1 \leq j \leq 4,$$

pour un certain réel λ. Si de plus, $f \neq id$ conserve l'ensemble des sommets du cube, on doit avoir $f(s_j) = s_j^-$ i.e. $\lambda = -1$.

Conclusion: 2 bijections affines conviennent $f = id$ et $f = \sigma$ (la symétrie centrale de centre o).