L3 - Mathématiques pour l'Enseignement - Géométrie élémentaire. 2012-2013

Contrôle du 11 juin 2013

Durée: 3 heures

- Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.
- Aucun point ne sera attribué aux réponses non justifiées.

On se place dans l'espace affine euclidien R^n, $n \geq 1$. On note $(\mid)$ le produit scalaire usuel et

$$d(M,N) = \sqrt{(\overrightarrow{MN} \mid \overrightarrow{MN})}$$

la distance euclidienne entre les points M et N de R^n.

Questions de cours

1. Calculer le volume du parallélotope de R^n porté par les $n+1$ points

$$P_0 = (0,\ldots,0), P_1 = (1,0,\ldots,0), P_2 = (1,1,0\ldots,0),\ldots,P_n = (1,\ldots,1).$$

2. Calculer l'aire d'un hexagone régulier H inscrit dans le cercle unité du plan.

3. Définir les notions de *grand cercle*, de *triangle sphérique* et d'*angle sphérique* dans R^3.
Soit T un triangle sphérique d'angles aux sommets α, β, γ. Que vaut $\alpha + \beta + \gamma$?

Exercice 1

1. Soit A et B deux points distincts de R^3 et I le point milieu du segment $[A,B]$.
(i) Montrer que le point $M \in R^3$ est équidistant de A et B si et seulement si

$$(\overrightarrow{IM} \mid \overrightarrow{AB}) = 0.$$

(ii) En déduire que l'ensemble des points équidistants de A et B est un plan dont on précisera un point et la direction.
Ce plan est appelé le *plan médiateur* de A et B et est noté $\mathrm{Med}(A,B)$.

Soit $f \in \mathrm{Is}(R^3)$ une isométrie affine.

2. (i) Montrer que si A est un point fixe de f, alors quel que soit M tel que $f(M) \neq M$, $A \in \mathrm{Med}(M, f(M))$.

(ii) On suppose que f admet quatre points fixes A, B, C, D non coplanaires. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que $f = Id$.

3. On suppose que $f \neq Id$ admet trois points fixes A, B, C non alignés. Soit $\Pi := \langle A, B, C\rangle$ le plan affine engendré par A, B, C, s_Π la réflexion de plan Π et $D \in R^3 \setminus \Pi$.
Montrer que $f(D) \neq D$. Déterminer $s_\Pi \circ f(D)$ et en déduire que f est une réflexion dont on précisera le plan fixe.

4. On suppose que $f \neq Id$ n'est pas une réflexion et qu'elle admet deux points fixes A, B. Soit $\Delta := \langle A, B\rangle$ la droite passant par A et B et $C \in R^3 \setminus \Delta$.
Montrer que $f(C) \neq C$. Soit s la réflexion de plan $\mathrm{Med}(C, f(C))$. Déterminer $s \circ f(C)$. En déduire que $s \circ f$ est une réflexion. Quelle est la nature géométrique de f?

Exercice 2

Pour un réel $l > 0$, on appelle $n-$ simplexe régulier de côté l toute famille de $n+1$ points $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ de R^n telle que

$$\forall i \neq j \in \{0, \ldots, n\}, \quad d(P_i, P_j) = l.$$

A.

1. (i) Montrer que pour $0 < i < j \leq n$, on a

$$(\overrightarrow{P_0P_i} \mid \overrightarrow{P_0P_j}) = \frac{l^2}{2}.$$

(ii) En déduire que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base affine de R^n.

2. Géométriquement, que sont les $1-$ simplexes de la droite, les $2-$ simplexes du plan, les $3-$ simplexes de l'espace?

On désigne par $[\mathcal{P}]$ l'enveloppe convexe du simplexe $\mathcal{P}$.

3. Pour $0 \leq k \leq n-1$, appelons $k-$ face de $[\mathcal{P}]$ l'enveloppe convexe de toute famille de $k+1$ points de $\mathcal{P}$.

(i) Que vaut le nombre $s_k \in N$ de $k-$ faces de $[\mathcal{P}]$?

(ii) Calculer l'entier $E = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k s_k$.

On suppose à présent $n = 3$.

4. (i) Citer avec soin un théorème de cours qui, lorsque $n = 3$, généralise le calcul du 3 (ii).

(ii) Décrire (avec clarté) un exemple de polyèdre de R^3 pour lequel l'entier E est distinct du 4 (i).

B.

5. (i) Montrer que pour tout point $C \in R^3$ les conditions suivantes sont équivalentes

- $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $C \in \mathrm{Med}(P_0, P_i)$
- $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $(\overrightarrow{P_0C} \mid \overrightarrow{P_0P_i}) = \frac{l^2}{2}$

(ii) Montrer, en déterminant ses coordonnées (c_1, c_2, c_3) dans le repère affine $(P_0, (\overrightarrow{P_0P_i})_{1 \leq i \leq 3})$, qu'il existe un unique point $C \in R^3$ vérifiant les conditions équivalentes du (ii). Reconnaitre ce point.

(iii) En déduire qu'il existe une unique sphère $\mathcal{S}$ de R^3, dont on précisera le centre et le rayon, telle que $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$.

C.

6. Tracer sur une figure du cube unité $\mathcal{C}$ un tétraèdre régulier $\mathcal{T}$ de côté $\sqrt{2}$ dont les quatre sommets A_0, A_1, A_2, A_3 sont des sommets de $\mathcal{C}$.
Tracer (avec clarté et en justifiant vos traits) les plans médiateurs $\mathrm{Med}(A_i, A_j), i \neq j$.

7. (i) Calculer l'aire du bord de l'enveloppe convexe $[\mathcal{T}]$ (pour rappel le bord est la réunion des $2-$ faces).

(ii) Calculer (en détaillant les étapes de calcul) le volume de $[\mathcal{T}]$.

8. (i) Pour $i \neq j$, donner une isométrie affine $s_{ij} \in \mathrm{Is}(R^3)$ telle que $s_{ij}(A_i) = A_j$ et $s_{ij}(A_k) = A_k, k \neq i, j$.

(ii) En déduire que l'ordre du sous-groupe $G_{\mathcal{T}} < \mathrm{Is}(R^3)$ des isométries affines qui conservent l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$ est supérieur ou égal à 24.

(iii) Conclure que $G_{\mathcal{T}}$ a exactement 24 éléments et décrire leur nature géométrique.