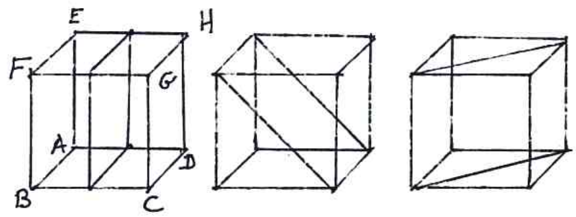
Corrigé du CC1

<u>Exercice 1</u> (Symétries du cube)

1 Voici la figure:



2

(i) Explicitons s_2: on observe que par s_2, $A \mapsto H, B \mapsto G, D \mapsto D, E \mapsto E$. Dès lors, pour le point $M = A + x(B-A) + y(D-A) + z(E-A)$ de coordonnées (x, y, z) on a

$$s_2(M) = H + x(G-H) + y(D-H) + z(E-H),$$

i.e.

$$s_2(x, y, z) = (x, 1-z, 1-y).$$

Pour s_3: $A \mapsto C, B \mapsto B, D \mapsto D, E \mapsto G$ et on a

$$s_3(M) = (1-y, 1-x, z).$$

(ii) Par calcul immédiat,

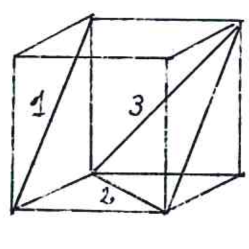
$$(s_2 \circ s_3 \circ s_2)(x, y, z) = (z, y, x).$$

Observer que $(s_2 \circ s_3 \circ s_2)^2 = id$; c'est donc une symétrie. Plus précisément, c'est une *réflexion* de plan fixe $x = z$.

On peut comprendre ceci par *conservation de la nature des propriétés par conjugaisons* (cf tds): Comme $s_2^2 = id$, $s_2 \circ s_3 \circ s_2 = s_2 \circ s_3 \circ s_2^{-1}$. C'est donc la réflexion de plan fixe $s_2(P_3)$.

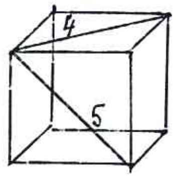
3

(i) Voici les tracés $s_i(CH)$:



Pour justifier ces traits, rappeler le fait que l'image de la droite (PQ) par la bijection affine f est la droite $(f(P)f(Q))$.

(ii) Soient les plans $P_4 : y = z$ et $P_5 : x = y$. Les réflexions s_4, s_5 de plans P_4, P_5 conservent les sommets du cube $\mathcal{C}$. Voici les images de (CH) par ces 2 réflexions:

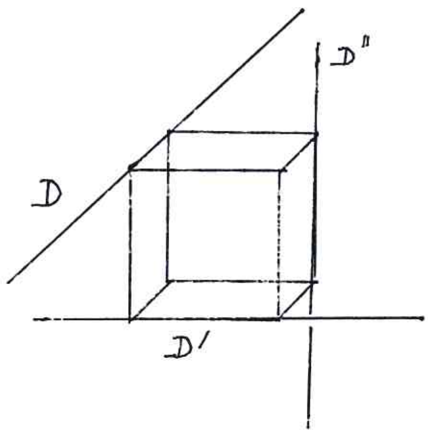


Les droites $(EH), s_i(EH), 1 \le i \le 5$, sont des diagonales faciales de $\mathcal{C}$. En composant avec une réflexion de plan fixe, l'un des plans d'équation $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ (c'est s_1), $z = \frac{1}{2}$ on obtient toutes les diagonales faciales de $\mathcal{C}$ comme images de (EH) par au plus deux réflexions conservant les sommets de $\mathcal{C}$.

__Exercice 2__

Partie A (Sécantes)

1 Voici une figure:



2 Par exemple $m' + t(m' - m'') = (1 + t, Y + t(Y - 1), -tZ)$, $t \in \mathbf{R}$ est une équation paramétrique de $\Delta = (m'm'')$.

3

(i) Soit m un point de coordonnées (x, y, z) avec $x \neq 0, x \neq 1$. Le point m est situé sur une sécante Δ ssi il existe $t_\star, Y, Z$ tels que

$$x = 1 + t_\star, \quad y = Y + t_\star(Y - 1), \quad z = -t_\star Z$$

et ce système admet la solution unique

$$t_\star = x - 1, \quad Y = \frac{x + y - 1}{x}, \quad Z = \frac{z}{1 - x}.$$

La droite d'équation

$$(1 + t, \frac{x + y - 1}{x} + t\frac{y - 1}{x}, t\frac{z}{x - 1}), \quad t \in \mathbf{R},$$

est donc l'unique sécante de $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$ passant par m.

(ii) Par ce qui précède, par tout point $m \in D \setminus \{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ passe une unique sécante Δ de $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$. Le triplet $(\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}'')$ admet donc une infinité de sécantes.

4*

Toute sécante $(\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}'', \mathcal{D}''')$ est aussi une sécante de $(\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}'')$ et dès lors admet l'équation paramétrique du **2**.

Par le **3**, l'unique sécante Δ_X de $(\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}'')$ passant par le point $(X, 0, 1)$ $(X \neq 0, 1)$ de $\mathcal{D}$ a pour équation

$$(1+t, \frac{X-1-t}{X}, \frac{t}{X-1}), \quad t \in R,$$

Dès lors $(\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}'', \mathcal{D}''')$ admet une sécante ssi il existe X tel que Δ_X rencontre $\mathcal{D}'''$, i.e. ssi il existe X et t tels que

$$1+t = \frac{X-1-t}{X} = \frac{t}{X-1}.$$

On obtient $X^2 - X + 1 = 0$ qui n'a pas de solutions réelles.

Conclusion: $(\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}'', \mathcal{D}''')$ n'admet pas de sécante.

Partie B (Sections planes du cube)

Soit $P(s)$, $s \in R$, le plan d'équation $x + y + z = 3s$.

1 Les coordonnées (x, y, z) des points du cube $\mathcal{C}$ satisfont à $0 \leq x+y+z \leq 3$. Dès lors, si $s \notin [0, 1]$, $P(s) \cap \mathcal{C} = \emptyset$.

2 Voir la figure infra. On suppose $s \in]0, \frac{1}{3}[$. Le plan $P(s)$ est le plan passant par les 3 points $m = (3s, 0, 0), m' = (0, 3s, 0), m'' = (0, 0, 3s)$, situés sur les arêtes de $\mathcal{C}$. $P(s) \cap \mathcal{C}$ est le triangle plein de sommets m, m', m''.

3 On suppose $s \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Le plan $P(s)$ intersecte les arêtes de $\mathcal{C}$ en 6 points: (EF) en $m = (3s-1, 0, 1)$, (EH) en $m' = (0, 3s-1, 1)$, (BF) en $m'' = (1, 0, 3s-1)$, (BC) en $n = (1, 3s-1, 0)$, (DC) en $n' = (3s-1, 1, 0)$ et (DH) en $n'' = (0, 1, 3s-1)$. $P(s) \cap \mathcal{C}$ est un hexagone plein de sommets m, m', m'', n, n', n''.

Il y a 3 arêtes de longueur $\sqrt{2}(3s-1)$ et 3 arêtes de longueur $\sqrt{2}(2-3s)$. Si l'hexagone est régulier on a $3s - 1 = 2 - 3s$, i.e. $s = \frac{1}{2}$. Les 6 sommets sont alors les points milieux des arêtes de $\mathcal{C}$ et l'hexagone est régulier.

4 Par symétrie le cas $s \in]\frac{2}{3}, 1[$ est identique au cas **2**.

En conclusion: $P(0) \cap \mathcal{C} = \{A\}$; pour $0 < s \leq \frac{1}{3}$, $P(s) \cap \mathcal{C}$ est un triangle (plein) équilatéral; pour $s \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ un hexagone (plein) , pour $\frac{2}{3} \leq s < 1$, c'est un triangle (plein) équilatéral; $P(1) \cap \mathcal{C} = \{G\}$.