Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2013-2014

Contrôle du 3 juin 2014

Durée : 3 heures

— *Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.*
— *Aucun point ne sera attribué aux réponses non justifiées.*

I Une conique

Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni du repère canonique, on considère la conique $\mathscr{C}_{s,t}$ d'équation

$$x^2 + 2t\,xy + y^2 + x + y + s = 0,$$

où s et t sont des paramètres réels et $t \neq \pm 1$.
a) Montrer que $\mathscr{C}_{s,t}$ est une conique à centre et déterminer son genre en fonction de t.
b) Déterminer le centre et les axes de $\mathscr{C}_{s,t}$.
c) Écrire l'équation de $\mathscr{C}_{s,t}$ sous forme réduite.
d) Tracer $\mathscr{C}_{s,t}$ pour $s = \frac{7}{6}$ et $t = 2$.

II Isométries du cube

On se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni de la distance euclidienne d usuelle et on désigne par $\mathscr{C}$ le cube unité (plein) situé dans le premier octant $x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$ et dont l'un des sommets est $(0,0,0)$.
On désigne par $G_{\mathscr{C}}$ le groupe des isométries affines du cube $\mathscr{C}$; c'est le sous-groupe des bijections affines f de $\mathbb{R}^3$ qui conservent
— la distance, i.e. telles que $d(M, M') = d(f(M), f(M'))$ quels que soient $M, M' \in \mathbb{R}^3$,
— les sommets du cube $\mathscr{C}$, i.e. telles que pour tout sommet S de $\mathscr{C}$, $f(S)$ est sommet de $\mathscr{C}$.

On note O le centre du cube $\mathscr{C}$.

1° Soit $f \in G_{\mathscr{C}}$.
a) Montrer que $f(O) = O$.
b) Montrer que $f(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$.

Soit

$$s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad M \mapsto O - \overrightarrow{OM}$$

la symétrie centrale de centre O.
On se propose d'étudier $G_{\mathscr{C}}$ à l'aide d'une partition des sommets de $\mathscr{C}$ en les sommets de deux tétraèdres réguliers de côté $\sqrt{2}$.

2° Représenter sur une figure du cube $\mathscr{C}$ deux tétraèdres $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ de longueur d'arêtes $\sqrt{2}$ dont les sommets, deux à deux distincts, sont les sommets du cube $\mathscr{C}$ et tels que $s(\mathscr{T}) = \mathscr{T}'$.

On désigne par $G_{\mathscr{T}}$ le groupe des isométries affines qui conservent l'ensemble des sommets $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ de $\mathscr{T}$.

3° Soit $f \in G_{\mathscr{C}}$.

a) Expliciter (par une phrase mathématique) l'assertion : $f \notin G_{\mathscr{T}}$.

b) En raisonnant sur la distance entre sommets, montrer que si $f \notin G_{\mathscr{T}}$ alors f envoie tout sommet de $\mathscr{T}$ sur un sommet de $\mathscr{T}'$.

c) En déduire que

$$G_{\mathscr{C}} \subset \left(G_{\mathscr{T}} \cup sG_{\mathscr{T}}\right) \quad \text{où } sG_{\mathscr{T}} = \{s \circ f,\ f \in G_{\mathscr{T}}\}.$$

4°

a) Montrer que tout sommet S_i' de $\mathscr{T}'$ est barycentre des sommets de $\mathscr{T}$ dont trois sont affectés du poids 1 et le quatrième est affecté du poids -1.

b) En déduire que si $f \in G_{\mathscr{T}}$ alors $f \in G_{\mathscr{C}}$ et que $G_{\mathscr{C}} = G_{\mathscr{T}} \cup sG_{\mathscr{T}}$.

5° On désigne par $\mathscr{S}_4$ le groupe des permutations des sommets de $\mathscr{T}$. On rappelle et on ne demande pas de redémontrer que l'application de restriction aux sommets

$$G_{\mathscr{T}} \to \mathscr{S}_4, \quad f \mapsto f_{|\{S_1,S_2,S_3,S_4\}}$$

est un isomorphisme de $G_{\mathscr{T}}$ sur le groupe $\mathscr{S}_4$.

a) Quel est le nombre d'éléments de $G_{\mathscr{C}}$?

b) En reprenant la figure de la question **2**, tracer, en justifiant vos traits et vos affirmations, le plan fixe et la direction d'une symétrie $s_{12} \in G_{\mathscr{T}}$ telle que $s_{12}(S_1) = S_2$, $s_{12}(S_\ell) = S_\ell$ $(\ell \neq 1, 2)$.

c) Combien y-a-t-il de symétries $s_{ij} \in G_{\mathscr{T}}$ qui permutent deux sommets S_i et S_j avec $i < j$, et fixent les deux autres sommets ?

6°

a) En se basant sur une propriété de $\mathscr{S}_4$, expliquer pourquoi toute isométrie $f \in G_{\mathscr{T}}$ est la composée de symétries $s_{ij} \in G_{\mathscr{T}}$.

b) En se basant sur la liste des permutations de $\mathscr{S}_4$, faire la liste (justifiée) des éléments de $G_{\mathscr{T}}$ en précisant la nature géométrique de ces isométries et leurs éléments caractéristiques (centre, axe ou plan d'une symétrie, axe et angle d'une rotation...).

III Deux calculs de volumes

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure naturelle d'espace affine euclidien. On note O le point de coordonnées $(0,0,0)$.

1° Dodécaèdre à faces rhombiques

On considère l'ensemble $\mathscr{S}$ des 14 points de $\mathbb{R}^3$ ayant pour coordonnées :

$$(\pm1, \pm1, \pm1) \quad \text{et} \quad (0,0,\pm2),\ (0,\pm2,0),\ (\pm2,0,0).$$

a) Faire un dessin.

b) Montrer que les points de coordonnées respectives $(2,0,0)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,1)$ et $(0,0,2)$ sont les sommets d'un losange $\mathscr{L}$.

c) Déterminer le centre de gravité G de $\mathscr{L}$. Montrer que la droite (OG) est perpendiculaire au plan contenant $\mathscr{L}$.

d) Calculer le volume de la pyramide de base $\mathscr{L}$ et de sommet O.

e) On admet que toutes les faces de l'enveloppe convexe de $\mathscr{S}$ sont isométriques à $\mathscr{L}$. On note f le nombre de faces et a le nombre d'arêtes. Démontrer la relation : $2f = a$. En déduire f.

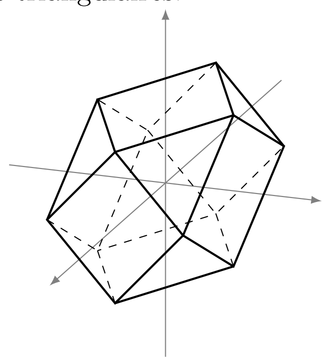
f) Calculer le volume de l'enveloppe convexe de $\mathscr{S}$.

2° **Cuboctaèdre**

Le *cuboctaèdre* $\mathscr{C}$ est l'enveloppe convexe des points suivants :

$$(\pm 1, \pm 1, 0), \quad (\pm 1, 0, \pm 1), \quad (0, \pm 1, \pm 1).$$

Il possède 6 faces carrées et 8 faces triangulaires.



a) Justifier par un dessin que le cuboctaèdre est un cube tronqué – c'est-à-dire que l'on peut l'obtenir comme intersection d'un cube et de huit demi-espaces bien choisis. Préciser les coordonnées du cube initial.

b) Calculer le volume du cuboctaèdre :
- — soit en décomposant le cuboctaèdre en pyramides comme en 1° f) ;
- — soit en utilisant la question précédente.

IV Lissage

On considère la courbe plane de Bézier

$$[0, 1] \to \mathbb{R}^2, \, t \mapsto M(t)$$

de points de contrôle $P_0, P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$.

1° Décrire l'algorithme de Casteljau qui calcule $M(t)$.

2° On suppose $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (2, -1)$, $P_3 = (3, 2)$.

a) Déterminer géométriquement les points $M(0), M(1), M(\frac{1}{2}), M(\frac{1}{4}), M(\frac{3}{4})$ à l'aide de cet algorithme.

b) En déduire une esquisse de la courbe de Bézier.