Université Claude Bernard Lyon 1

L3 - Mathématiques pour l'enseignement – Géométrie élémentaire 2014-2015

Corrigé du contrôle du 16 mars 2015

Exercice 1

1. Chacune des deux équations du système est celle d'un plan (car $(a,b,c) \neq (0,0,0) \neq (a',b',c')$). Comme $bc' - cb'$ n'est pas nul, les équations ne sont pas proportionnelles. Donc l'intersection des deux plans est une droite.
2. Soit A un point de de $\mathscr{F}$ et soient (x_0, y_0, z_0) ses coordonnées. On a donc :

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 = d \\ a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 = d'. \end{cases} \qquad ((S))$$

Soit u un vecteur de coordonnées (X, Y, Z) dans la base (e_1, e_2, e_3). Alors u appartient à la direction de $\mathscr{F}$ si et seulement si $M = A + u$ appartient à $\mathscr{F}$, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} a(x_0 + X) + b(y_0 + Y) + c(z_0 + Z) = d \\ a'(x_0 + X) + b'(y_0 + Y) + c'(z_0 + Z) = d'. \end{cases}$$

Compte tenu de (S), cela donne le système suivant pour $\overrightarrow{\mathscr{F}}$:

$$\begin{cases} aX + bY + cZ = 0 \\ a'X + b'Y + c'Z = 0. \end{cases}$$

Exercice 3

1. (a) Soient $M \in \mathscr{E}$, $M_2 = h_2(M)$ et $M' = h_1(M_2)$. On a par définition :

$$\overrightarrow{QM_2} = \ell\, \overrightarrow{QM} \text{ et } \overrightarrow{PM'} = k\, \overrightarrow{PM_2}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM'} &= k\, \overrightarrow{PM_2} = k\, \overrightarrow{PQ} + k\, \overrightarrow{QM_2} = k\, \overrightarrow{PQ} + k\ell\, \overrightarrow{QM} = k\, \overrightarrow{PQ} + k\ell\big(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM}\big) \\ &= k(1-\ell)\overrightarrow{PQ} + k\ell\, \overrightarrow{PM}. \end{aligned}$$

(b) On suppose que $k\ell \neq 1$. Le point M est fixé par $h_1 \circ h_2$ si et seulement si $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PM'}$, ce qui revient à dire :

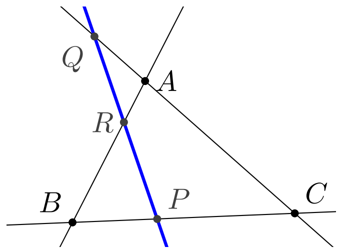
$$(1 - k\ell)\overrightarrow{PM} = k(1-\ell)\overrightarrow{PQ}.$$

Comme $1 - k\ell \neq 0$, c'est équivalent à : $\overrightarrow{PM} = \frac{k(1-\ell)}{1-k\ell}\overrightarrow{PQ}$. Cette égalité définit un unique point fixe S et ce point appartient à (PQ).

(c) Si $k\ell \neq 1$, les égalités : $\overrightarrow{PS} = k(1-\ell)\overrightarrow{PQ} + k\ell\, \overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{PM'} = k(1-\ell)\overrightarrow{PQ} + k\ell\, \overrightarrow{PM}$ donnent : $\overrightarrow{SM'} = k\ell\, \overrightarrow{SM}$ donc $h_1 \circ h_2$ est l'homothétie de centre S et de rapport $k\ell$.
Si $k\ell = 1$, alors $\overrightarrow{MM'} = k(1-\ell)\overrightarrow{PQ}$, ce qui définit la translation de vecteur $k(1-\ell)\overrightarrow{PQ}$.

Soient k et ℓ deux réels non nuls. Soient h_1 l'homothétie de centre P et de rapport k et h_2 l'homothétie de centre Q et de rapport ℓ. Démontrer que $h_1 \circ h_2$ est une homothétie dont le centre appartient à (PQ) ou une translation.

2. On suppose que P, Q et R sont alignés.

   (a) 

   (b) Soit $f = h_1 \circ h_2 \circ h_3$. D'après la question 1., comme les centres des h_i sont sur la droite (PQ), leur composée f est une homothétie dont le centre T appartient à (PQ) ou une translation dont le vecteur appartient à la direction de (PQ).

   (c) On remarque que $f(B) = h_1 \circ h_2(A) = h_1(C) = B$. Par suite, f, qui est une homothétie dont le centre est sur (PQ) ou une translation de vecteur proportionnel à $\overrightarrow{PQ}$, a un point fixe B en-dehors de (PQ) : c'est donc l'identité. Par suite, le produit des trois rapports des homothéties vaut 1. Or, si

$$\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = 1. \tag{1}$$

3. (a) D'après la question précédente, on a :

$$\frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = 1 = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}},$$

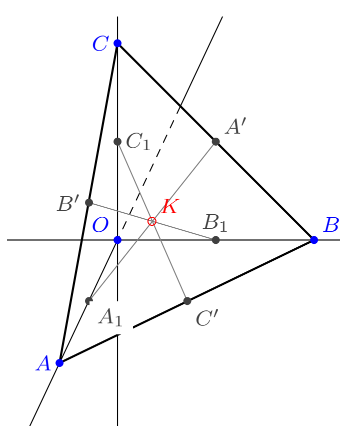
   d'où en simplifiant : $\dfrac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$.

   (b) L'égalité précédente donnc, avec $\overline{R'A} = \overline{R'B} + \overline{BA}$ et $\overline{RA} = \overline{RB} + \overline{BA}$:

$$1 + \frac{\overline{BA}}{\overline{R'B}} = \frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1 + \frac{\overline{BA}}{\overline{RB}}$$

   d'où $\overline{R'B} = \overline{RB}$ (dans n'importe quel repère de (AB)) et $R = R'$.

Exercice 3

1. (a) 

(b) Les coordonnées de A_1 sont : $(1,0,0)$; celles de A' sont : $(0,1,1)$. Par suite, (A_1A') est l'ensemble des points de la forme

$$A_1 + t\overrightarrow{A_1A'} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ t \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

De même, $B_1 = (0,1,0)$ et $B' = (1,0,1)$ donc (B_1B') est l'ensemble des points de la forme

$$B_1 + u\overrightarrow{B_1B'} = \begin{pmatrix} u \\ 1-u \\ u \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R}).$$

(c) Les droites $(A'A_1)$ et $(B'B_1)$ se coupent si et seulement s'il existe t et u réels tels que

$$\begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 1-u \\ u \end{pmatrix}, \quad i.e. \begin{cases} 1-t = u \\ t = 1-u \\ t = u, \end{cases}$$

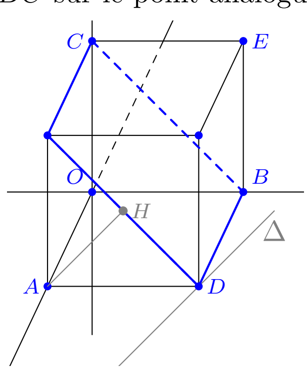
système dont l'unique solution est : $t = u = \frac{1}{2}$. Autrement dit, (A_1A') et (B_1B') se coupent en $K = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(d) Permuter les coordonnées y et z revient à remplacer (B, B_1, B') par (C, C_1, C') tout en fixant A, A_1, A', mais aussi K.

Autrement dit, la symétrie $\sigma : (x,y,z) \mapsto (x,z,y)$ fixe O et A et permute B et C. Comme (A_1A') et (B_1B') se coupent en K, leurs images (A_1A') et $(C'C_1)$ se coupent en $\sigma(K) = K$.

(e) Tout tétraèdre est l'image de $OABC$ par une unique application affine f. Or, une application affine préserve le milieu (par exemple, si C_1 est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{C_1A} = \overrightarrow{BC_1}$ donc $\overrightarrow{f(C_1)f(A)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{C_1A}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{BC_1}) = \overrightarrow{f(B)f(C_1)}$) et l'alignement donc elle envoie l'intersection K des droites passant par les milieux des côtés de $OABC$ sur le point analogue pour le tétraèdre image.

2. (a)



(b) Un point $M = (x,y,z)$ appartient à (BCD) si et seulement s'il existe (s,t) réels tels que $M = B + s\overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{BD}$. Cela s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2s+2 \\ 2s \end{pmatrix}$$

Pour éliminer s et t, on considère cette égalité comme un système de trois équations à deux inconnues s et t (et trois paramètres x, y et z) :

$$\begin{aligned}
M \in (BCD) &\Leftrightarrow \exists s,t,\ \begin{cases} 2t = x \\ -2s+2 = y \\ 2s = z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists s,t,\ \begin{cases} t = \frac{x}{2} \\ s = \frac{z}{2} \\ 2 = y+z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow y+z = 2
\end{aligned}$$

À vue : le plan est parallèle à (Ox) donc l'équation ne dépend pas de x (pourquoi ?). L'intersection avec (Oyz) est symétrique par rapport à ≪ la première bissectrice ≫ donc l'équation est de la forme $y \pm z = c$; on obtient : $y+z=2$ facilement.

Le vecteur $\overrightarrow{OE} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ dirige (OE).

(c) Soit $M = (x,y,z)$. L'image $M' = (x',y',z')$ de M par p est le point de (BCD) tel que $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont colinéaires. Par suite, on a :

$$\begin{cases} y'+z' = 2 \\ \exists t \in \mathbb{R},\ M' = M + t\overrightarrow{OE} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x' = x \\ y' = y+2t \\ z' = z+2t \\ y'+z' = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x' = x \\ y' = y+2t \\ z' = z+2t \\ 4t = 2-y-z. \end{cases}$$

On résout pour trouver : $M' = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{2} - \frac{z}{2} + 1 \\ -\frac{y}{2} + \frac{z}{2} + 1 \end{pmatrix}$.

(d) Un point M appartient à (AD) si et seulement s'il existe s réel tel que $M = A + s\overrightarrow{AD}$, c'est-à-dire : $M = \begin{pmatrix} 2 \\ 2s \\ 0 \end{pmatrix}$. L'image de M est alors : $M' = \begin{pmatrix} 2 \\ s+1 \\ -s+1 \end{pmatrix}$. C'est la droite passant par $H = (2,1,1)$ (qui est l'image de A, obtenue pour $s=0$) et dirigée par le vecteur $(0,1,-1)$.

Alternativement (et plus simplement !), on sait que l'image d'un sous-espace affine est un sous-espace affine. Donc l'image de (AD) est la droite $(p(A)p(D)) = (HD)$.

(e) On cherche les $M = (x,y,z)$ dont l'image M' calculée ci-dessus est D. Cela revient à résoudre :

$$\begin{cases} x = 2 \\ \frac{y}{2} - \frac{z}{2} + 1 = 2 \\ -\frac{y}{2} + \frac{z}{2} + 1 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 2. \end{cases}$$

Alternativement, il est évident par définition d'une projection que les points qui ont pour image D sont ceux de la parallèle Δ à (OE) passant par D.

L'image réciproque de la droite (AD) est l'ensemble des points dont l'image appartient à (AD). Comme p est une projection, l'image d'un point appartient aussi à (BDC). Comme A n'appartient pas à (BCD), l'intersection de (AD) et (BCD) est le singleton $\{D\}$. Ainsi, l'image réciproque de (AD) par (BCD) est Δ.