Équations de sous-espaces

Université Claude Bernard–Lyon I
Licence 3 de Mathématiques : Géométrie élémentaire
Année 2012–2013

On se place le plus souvent dans un plan affine ou un espace affine de dimension 3, – euclidien lorsqu'il le faut – muni d'un repère – orthonormé lorsqu'il le faut – ou, ce qui revient au même, dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ – muni du produit scalaire euclidien si nécessaire.

I Changement de repère

1° On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on note (x, y) les coordonnées d'un point du plan dans le repère canonique. Soient a, b, c, d, e, f six réels. À quelle condition la formule

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

définit-elle un changement de repère ? Lorsque c'est le cas, décrire le nouveau repère dans le repère canonique.

2° On se place dans $\mathbb{R}^n$ affine, où n est un entier naturel non nul. Rappelons que l'on dit que $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ est un repère affine si $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est un repère. Cette définition semble faire jouer un rôle particulier à A_0. Montrer que pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, $(A_{\sigma(0)}, \ldots, A_{\sigma(n)})$ est un repère affine.
[On pourra commencer par des exemples en dimension 2 et 3, disons, (A_2, A_0, A_1) en dimension 2 et (A_2, A_1, A_3, A_0) en dimension 3.]

II Équations

1° Équation d'une droite dans le plan

Soit $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points distincts du plan. Montrer qu'un point $M = (x, y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0.$$

2° Équation d'un plan dans l'espace

a) Soit $A = (x_A, y_A, z_A)$ un point, $u_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $u_2 = (a_2, b_2, c_2)$ deux vecteurs non colinéaires. Montrer qu'un point $M = (x, y, z)$ appartient au plan contenant A et engendré par u_1 et u_2 si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x - x_A & a_1 & a_2 \\ y - y_A & b_1 & b_2 \\ z - z_A & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

b) En s'inspirant de 1°, exprimer une équation du plan (ABC) par l'annulation d'un déterminant 4×4, où $A = (x_A, y_A, z_A)$, etc.

3° On fait tourner un repère le long d'une ellipse... Pour t réel, on pose :

$$M = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $\mathscr{R}' = (M, e_1, e_2, e_3)$ est un repère. Déterminer, dans $\mathscr{R}'$, une équation cartésienne du plan passant par $A = (-1, -2, 1)$ et ayant pour vecteur normal $n = (1, 2, 3)$ (ici, A et n sont décrits dans le repère canonique).

4° Soient m et n deux entiers non nuls. On se place dans $\mathbb{R}^n$. Soit A une matrice réelle de taille $m \times n$ et $B \in \mathbb{R}^m$. Montrer que l'ensemble des points $X \in \mathbb{R}^n$ du système $AX = B$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$.

Montrer réciproquement que tout sous-espace affine F de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système de cette forme (indiquer comment trouver, au moins en principe, A et B).

III Présentation paramétrique et équation cartésienne

1° Soient a, b, c, d quatre réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Soit D l'ensemble des points (x, y) défini par la condition :

$$(x, y) \in D \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = at + c \\ y = bt + d. \end{cases}$$

Quelle est la nature de D ? En donner une équation cartésienne.

2° Soient a, b, c trois réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Donner une présentation paramétrique de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.

3° Poser et résoudre les mêmes questions pour une droite et un plan dans l'espace.

IV Incidence

1° Deux droites dans le plan

Soit deux droites D et D_2 d'équations[1] $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ dans le plan. L'annulation de quel déterminant caractérise-t-il le parallélisme de ces deux droites ?

2° Trois droites dans le plan

Ajoutons une troisième droite D_3 d'équation $a_3x + b_3y + c_3 = 0$. Montrer que D_1, D_2 et D_3 sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3° Deux plans dans l'espace

Soit trois plans P_1 et P_2 d'équations $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d = 0$ dans l'espace. Montrer que P_1 et P_2 sont parallèles ou confondus si et seulement si

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{SSI} \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & {}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

4° Trois plans dans l'espace

Ajoutons un troisième plan P_3 d'équation $a_3x + b_3y + c_3z = 0$. Que traduit l'égalité

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \ ?$$

5° Quatre plans dans l'espace

Ajoutons un quatrième plan P_4 d'équation $a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0$. Que traduit l'égalité

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0 \ ?$$

---

1. On se donne a_1, b_1, c_1 et on suppose que $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$. Idem pour les autres droites et plans.