Université Claude Bernard–Lyon I
Licence 3 de Mathématiques : Géométrie élémentaire
Année 2012–2013

Deux extraits de partiels

I Partiel de l'automne 2007 (extrait)

Soit (z_0, z_1, z_2, z_3) une base affine de $\mathbf{R}^3$, $[P] = [z_0, z_1, z_2, z_3]$ son enveloppe convexe et y_0, y_1, y_2, y_3 quatre points de $\mathbf{R}^3$.

1° On suppose que pour tout $j \in \{0,1,2,3\}$

$$y_j = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ b_{j,0} & b_{j,1} & b_{j,2} & b_{j,3} \end{pmatrix} \in [P] \smallsetminus \{z_0\}.$$

a) Montrer que pour tout $j \in \{0,1,2,3\}$, l'un au moins des coefficients $b_{j,1}$, $b_{j,2}$, $b_{j,3}$ est non nul.
b) Montrer que $z_0 \notin [y_0, y_1, y_2, y_3]$.
(On pourra procéder par l'absurde en supposant $z_0 \in [y_0, y_1, y_2, y_3]$ et en explicitant cette condition dans la base affine (z_0, z_1, z_2, z_3).)

2° Soit f une bijection affine de $\mathbf{R}^3$.
a) Quelle est l'image par f de l'enveloppe convexe $[P]$?
b) Avec la question 1, montrer l'équivalence :

$$f[P] = [P] \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{0,1,2,3\},\ f(z_i) \in \{z_0, z_1, z_2, z_3\}.$$

II Partiel de novembre 2006 (entier)

On considère l'espace affine $\mathbf{R}^3$. La direction d'un sous-espace affine $A \subset \mathbf{R}^3$ est notée $\overrightarrow{A}$.
Un triplet (D_1, D_2, D_3) de droites affines de $\mathbf{R}^3$ de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3$ est appelé un *triplexe* si

(i) $D_1 \cap D_2 = D_1 \cap D_3 = D_2 \cap D_3 = \varnothing$,
(ii) $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$.

Dans la partie A, on se propose d'étudier l'opération du groupe des bijections affines $GA(\mathbf{R}^3)$ sur l'ensemble des triplexes de $\mathbf{R}^3$.

Partie A

1° Montrer que l'image $(f(D_1), f(D_2), f(D_3))$ de tout triplexe (D_1, D_2, D_3) par une bijection affine $f \in GA(\mathbf{R}^3)$ est un triplexe.

2° Rappeler une condition nécessaire et suffisante pour que deux sous-espaces affines A et A' de $\mathbf{R}^3$ soient d'intersection non vide.

3° Pour un triplexe (D_1, D_2, D_3) on désigne par $P_{i,j}$, $i < j$, le plan affine contenant D_i et de direction $\overrightarrow{P_{i,j}} = \overrightarrow{D_i} + \overrightarrow{D_j}$.
a) Montrer que D_1 coupe $P_{2,3}$ en un point a_1, que D_2 coupe $P_{1,3}$ en un point a_2 et que D_3 coupe $P_{1,2}$ en un point a_3.

b) Montrer qu'il existe trois vecteurs $\vec{v}_i \in \overrightarrow{D_i}, 1 \leqslant i \leqslant 3$, tels que

$$\overrightarrow{a_1a_2} = \vec{v}_3, \quad \overrightarrow{a_1a_3} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Montrer ensuite que $\vec{v}_i \neq \vec{0}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$.
[Pour l'existence, observer qu'on a aussi $a_2 \in P_{2,3}$, $a_1 \in P_{1,3}$ et $a_1 \in P_{1,2}$.]

Pour la suite, on notera $\mathscr{R}_{(D_1,D_2,D_3)}$ la base affine $(a_1, a_1 + \vec{v}_1, a_1 + \vec{v}_2, a_1 + \vec{v}_3)$ ainsi construite.

4° Soient (D'_1, D'_2, D'_3) un second triplexe, $P'_{i,j}, i < j$, (resp. a'_i) les plans (resp. les points d'intersection) définis comme à la question 3.
On suppose que f est une bijection affine telle que $f(D_i) = D'_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$.
a) Montrer que $f(P_{i,j}) = P'_{i,j}$.
b) Montrer que $f(a_i) = a'_i, 1 \leqslant i \leqslant 3$, et ensuite que $f(\mathscr{R}_{(D_1,D_2,D_3)}) = \mathscr{R}_{(D'_1,D'_2,D'_3)}$.
[Pour les repères, calculer $L_f(\overrightarrow{a_1a_2})$ et $L_f(\overrightarrow{a_1a_3})$.]
c) En déduire qu'il existe au plus une bijection affine f telle que $f(D_i) = D'_i, 1 \leqslant i \leqslant 3$.

5°
a) En conclusion, montrer que l'opération

$$\varphi : GA(\mathbf{R}^3) \times \mathscr{T} \to \mathscr{T} : (D, D', D'') \mapsto (f(D), f(D'), f(D''))$$

du groupe affine sur l'ensemble $\mathscr{T}$ des triplexes est transitive et simple.
b) Peut-on aussi conclure qu'il en est de même pour tout espace affine réel de dimension 3 ?
[Justifier votre réponse.]

Partie B

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
On considère le cube $C = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant 3\}$. Pour la suite du problème, on fixe un triplexe de référence $(D_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ en choisissant trois arêtes du cube C comme suit :
- D_1 est la droite affine passant par $(0,0,1)$ et dirigée par $\vec{e}_1$;
- D_2 est la droite affine passant par $(1,0,0)$ et dirigée par $\vec{e}_2$;
- D_3 est la droite affine passant par $(0,1,0)$ et dirigée par $\vec{e}_3$.

1° Faire une figure.

On se propose dans cette partie d'étudier l'ensemble des bijections affines qui stabilisent la réunion $T = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ des droites du triplexe de référence (D_1, D_2, D_3).

2°
a) Montrer que l'ensemble G_T des bijections affines $f \in GA(\mathbf{R}^3)$ telles que $f(T) = T$ est un sous-groupe du groupe affine $GA(\mathbf{R}^3)$.
b) Montrer que si $f \in G_T$, alors quel que soit $i \in \{1,2,3\}$, il existe $j \in \{1,2,3\}$ tel que $f(D_i) = D_j$.
c) En déduire, à l'aide de la partie A, que le groupe G_T est isomorphe au groupe des permutations de l'ensemble $\{D_1, D_2, D_3\}$. *[On demande une argumentation claire.]*