Université Claude Bernard–Lyon I
Licence 3 de Mathématiques : Géométrie élémentaire
Année 2012–2013

Un peu de volumes

I Contrôle final de juin 2012 (partie)

1° On se place dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}$. Soit P un polygone du plan ayant pour sommets p_0, p_1,. . ., p_r (deux à deux distincts) et pour côté les segments $[p_0p_1]$,. . ., $[p_{r-1}p_r]$, $[p_rp_0]$. On suppose que deux côté ne se coupent jamais. Exprimer l'aire de P en fonction des coordonnées (a_k, b_k) des sommets p_k $(0 \leqslant k \leqslant r)$ dans $\mathscr{R}$.
[*Commencer par un triangle.*]

2° Soit $\mathscr{C}$ un cube dont les arêtes sont de longueur 1 dans un espace affine euclidien de dimension 3.
a) Dessiner $\mathscr{C}$ et un tétraèdre régulier $\mathscr{T}$ dont les arêtes mesurent $\sqrt{2}$ et dont les sommets A, B, C, D sont des sommets de $\mathscr{C}$.
b) Soit S l'isobarycentre de A, B, C, D. Calculer la distance AS.
c) Montrer que la droite (DS) est orthogonale au plan (ABC).
d) Calculer le volume de $\mathscr{T}$.
e) Soit $\mathscr{O}$ l'octaèdre régulier dont les sommets sont les centres des faces de $\mathscr{C}$. Calculer le volume de $\mathscr{O}$.

II Distance entre deux sous-espaces

Dans cette partie, on n'utilise pas, *a priori*, la matrice de Gram.

1° Distance d'un point à un sous-espace

a) Distance d'un point à une droite dans le plan
Montrer d'au moins deux façons différentes que la distance d'un point $M = (x, y)$ à la droite D d'équation $ax + by + c = 0$ est :
$$d(M, D) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

b) Distance d'un point à un plan dans l'espace
Montrer que la distance d'un point $M = (x, y, z)$ au plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est :
$$d(M, P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$
On pourra chercher le projeté orthogonal de M comme un point particulier de la droite contenant M et engendrée par $u = (a, b, c)$.

c) Distance d'un point à une droite dans l'espace
Soit, dans l'espace, A un point, v un vecteur non nul et D la droite contenant A et dirigée par v. Montrer que la distance d'un point M à D est :
$$d(M, D) = \frac{||\overrightarrow{AM} \wedge v||}{||v||}.$$
On pourra utiliser le sinus de l'angle formé par $\overrightarrow{AM}$ et v.

2° Distance entre deux droites dans l'espace

Pour $i = 1, 2$, soit D_i une droite de l'espace, A_i un point de D_i et $v_i = (a_i, b_i, c_i)$ un vecteur directeur. On suppose que D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires ; en particulier, v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.

a) Vérifier que $v = v_1 \wedge v_2$ est, à scalaire près, l'unique vecteur orthogonal à v_1 et v_2.
b) Supposons qu'il existe une droite Δ perpendiculaire à D_1 et D_2 (i.e. de direction orthogonale à celles de D_1 et D_2 et qui les coupe toutes deux). Montrer que Δ est contenu dans le plan P_i contenant (un point de) D_i et engendré par v_i et v ($i = 1, 2$).
En déduire l'unicité et l'existence d'une perpendiculaire commune. On note H_i le point d'intersection de D_i et Δ ($i = 1, 2$).
Montrer que la distance de D_1 à D_2 est la distance H_1H_2.

III Matrice de Gram

1° Plus ou moins des rappels de cours

a) Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_r)$ une base orthonormée de E et $A(\mathbf{v}) = A_{\mathbf{e}}(\mathbf{v})$ la matrice $r \times n$ suivante :

$$A(\mathbf{v}) = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = \big(\langle e_i, v_j\rangle\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant n}}.$$

Montrer la relation :

$$G(\mathbf{v}) = {}^tA(\mathbf{v})A(\mathbf{v}).$$

b) En déduire que la famille $\mathbf{v}$ est libre si et seulement si $g(\mathbf{v}) \neq 0$.
On choisira une base $\mathbf{e}$ *de l'espace engendré par* $\mathbf{v}$ *et on appliquera la question précédente.*
c) Montrer que le rang de $G(\mathbf{v})$ est égal au rang de $\mathbf{v}$.
Soit r le rang de $\mathbf{v}$. *La question précédente permet d'exhiber un mineur $r \times r$ non nul. Inversement, si $(v_1, \ldots, v_r)$ est libre, montrer que les colonnes $r+1$ à n de $G(\mathbf{v})$ sont des combinaisons linéaires des r premières.*
d) En particulier, pour $n = 2$ et v_1, v_2 non nuls, on a :

$$\sin^2(\widehat{v_1, v_2}) = \frac{g(v_1, v_2)}{g(v_1)g(v_2)}.$$

Interpréter cette formule en termes d'aire.

2° Matrice de Gram et distance entre sous-espaces

a) Soit w_n le projeté orthogonal de v_n sur l'espace F engendré par $(v_1, \ldots, v_{n-1})$; on pose : $v'_n = v_n - w_n$. Montrer que l'on a :

$$g(v_1, \ldots, v_n) = \|v'_n\|^2 g(v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

b) En déduire une formule intrinsèque (ne dépendant d'aucune base) pour exprimer la distance d'un point à un sous-espace affine.
c) Comparer cette formule à celles de la partie II.
Pour une droite dans le plan engendrée par $v = (a, b)$, on a par exemple : $a^2 + b^2 = g(v)$. Que représente le numérateur ? Pour un plan engendré par v_1 et v_2, quel rapport entre les coefficients a, b, c d'une équation du plan, le produit vectoriel $v_1 \wedge v_2$ et le déterminant de Gram $g(v_1, v_2)$? Etc.
d) Deuxième approche pour la distance entre deux droites. On reprend les notations de II 2°. Pour $t_i \in \mathbb{R}$, on note $H_i = A_i + t_iv_i$ (i.e. $\overrightarrow{A_iH_i} = tv_i$). Montrer qu'il existe un unique couple (t_1, t_2) tel que la droite (H_1H_2) soit perpendiculaire à D_1 et D_2.
On écrira un système 2×2 dont la matrice est une matrice de Gram.
Montrer que l'on a :

$$d(D_1, D_2)^2 = \frac{g\big(\overrightarrow{A_1A_2}, v_1, v_2\big)}{g(v_1, v_2)}.$$

On commencera par se convaincre que le numérateur est indépendant de A_1 et A_2 et que le quotient est indépendant de v_1 et v_2.

3° Matrice de Gram et angle entre supplémentaires

a) Soit k compris entre 1 et n. Supposons que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ pour tout $i \leqslant k$ et tout $j \geqslant k+1$. Montrer que l'on a :

$$g(v_1, \ldots, v_n) = g(v_1, \ldots, v_k) g(v_{k+1}, \ldots, v_n).$$

b) Soit k compris entre 1 et n. Montrer que l'on a :

$$g(v_1, \ldots, v_n) \leqslant g(v_1, \ldots, v_k) g(v_{k+1}, \ldots, v_n).$$

Montrer qu'il y a égalité si et seulement si la condition de la question précédente est remplie.

c) Comment pourrait-on définir l'angle entre deux sous-espaces supplémentaires ?