Université Lyon 1 – 2012-2013
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche n°1

Première partie : algorithme de Gauss et théorème du rang

On fixe un corps $\mathbb{K}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note I_p la matrice identité d'ordre p, $E_{i,j}^{(p)}$ la matrice $p \times p$ dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 et les autres 0. On considère les matrices $p \times p$ suivantes (D pour dilatation, T pour transvection, P pour permutation) :

$$\begin{array}{cl} 1 \le i \le p, \\ \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha \neq 0 \end{array} \qquad D_{i,\alpha}^{(p)} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & \\ & \alpha & \\ & & I_{p-i} \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{c} 1 \le i \neq j \le p, \\ \beta \in \mathbb{K} \end{array} \qquad T_{i,j;\beta}^{(p)} = I_p + \beta\, E_{i,j}^{(p)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \beta & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (\beta \text{ en position } (i,j))$$

$$1 \le i < j \le p \qquad P_{i,j}^{(p)} = P_{j,i}^{(p)} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & & & \\ & 0 & \dots & 1 & & \\ & & I_{j-i-1} & & & \\ & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & I_{p-j} \end{pmatrix}.$$

Exercice 1 (Opérations sur les rangées)**.** Soit A une matrice rectangulaire de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Calculer le produit $D_{i,\alpha}^{(m)} A$: vérifier qu'on l'obtient en multipliant la $i$ème ligne de A par α, ce que l'on notera : $L_i \leftarrow \alpha\, L_i$. Ceci donne la première colonne du tableau suivant, que l'on vérifiera :

opération	$D_{i,a}^{(m)}\, A$	$T_{i,j;\beta}^{(m)}\, A$	$P_{i,j}^{(m)}\, A$	$A\, D_{i,\alpha}^{(n)}$	$A\, T_{i,j;\beta}^{(n)}$	$A\, P_{i,j}^{(n)}$
résultat	$L_i \leftarrow \alpha\, L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \beta\, L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$	$C_i \leftarrow \alpha\, C_i$	$C_j \leftarrow C_j + \beta\, C_i$	$C_i \leftrightarrow C_j$

Exercice 2 (Preuve effective du théorème du rang)**.** Rappelons que le rang d'une matrice de taille (m,n) comme la dimension de l'espace engendré par ses colonnes dans $\mathbb{K}^m$.

1. Vérifier que le rang d'une matrice A est le rang de l'application $\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $X \mapsto AX$.
2. À l'aide de la formule de changement de base, montrer que le rang d'une matrice est invariant par les opérations élémentaires de l'exercice précédent.
3. À l'aide de l'algorithme de Gauss, montrer que toute matrice $m \times n$ est équivalente à une matrice de la forme
$$I_{m,n,r} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad \text{où } r \in \{0, \dots, \min(m,n)\}.$$
4. Démontrer le théorème du rang : $\dim\ker A + \operatorname{rg} A = n$ si A est de taille (m,n). En déduire l'unicité de r dans la question précédente.
5. Démontrer que les rangs d'une matrice et de sa transposée sont égaux.

Exercice 3 (Générateurs du groupe linéaire)**.**

1. Démontrer que les dilatations, les transvections et les matrices de permutation du préambule engendrent le groupe linéaire $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$. Éliminer les matrices de permutation.
2. Démontrer que les transvections engendrent le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_p(\mathbb{K})$.

Exercice 4 (Complexité de l'algorithme de Gauss)**.** Évaluer le nombre d'opérations (additions/soustractions et multiplications/divisions) que l'on effectue en résolvant un système linéaire à n équations et n inconnues générique (ayant une unique solution) avec l'algorithme de Gauss. [Il s'agit de montrer que le nombre d'opérations est équivalent à $n^3/3$.]

Pourquoi est-il raisonnable de négliger les comparaisons (pour trouver le plus grand pivot dans chaque colonne) et les permutations de lignes (pour placer le pivot à la bonne place) ?

Deuxième partie : groupes topologiques

Dans les exercices qui suivent, G désigne un groupe topologique séparé de neutre e.

Exercice 5.

1. Soit $x_0 \in G$. Montrer que les applications $L_{x_0} : G \to G$, $x \mapsto x_0x$ et $R_{x_0} : G \to G$, $x \mapsto xx_0$ sont des homéomorphismes.
2. Montrer que si $U \subset G$ est un ouvert et $V \subset G$ quelconque, alors $U^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in U\}$ et $UV = \{uv \mid u \in U,\, v \in V\}$ sont ouverts.
3. Montrer que si U et V sont compacts alors UV est compact.

   En revanche, le produit de deux fermés n'est pas nécessairement fermé : donner un exemple de groupe et de parties fermées U et V telles que UV n'est pas fermé. (Voir l'exercice 6, question 3.)

Exercice 6.

1. Montrer que l'ensemble des Vx_0, resp. x_0V, lorsque V parcourt l'ensemble des voisinages de e, est un système fondamental de voisinages du point x_0 de G, c'est-à-dire que tout voisinage de x_0 contient un ensemble de cette forme.
2. Soit $f : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xx_0y^{-1}$. Montrer que f est continue. En déduire que l'ensemble des Vx_0V^{-1} lorsque V parcourt l'ensemble des voisinages de e est un système fondamental de voisinages du point x_0 de G.

Exercice 7. On désigne par $\overline{A}$ l'adhérence de la partie A de G.

1. (a) Soit U un voisinage de e et soit x, y dans G. Montrer qu'il existe un ouvert $V \subset U$ tel que $xVyV \subset xyU$.

   (b) En déduire que si x et y sont dans les adhérences $\overline{A}$ et $\overline{B}$ de parties A et B de G, alors $xyU \cap AB \neq \emptyset$.

   (c) Montrer que $\overline{A} \cdot \overline{B} \subset \overline{AB}$.
2. Montrer que $\overline{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$.
3. Montrer que pour tout x, y dans G, $x\,\overline{A}\,y = \overline{xAy}$.
4. On suppose que $ab = ba$ pour tout couple (a, b) de $A \times B$. Montrer, en considérant l'application $f : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$, que $ab = ba$ pour tout couple (a, b) de $\overline{A} \times \overline{B}$.
5. Montrer que l'adhérence d'un sous groupe H de G est un sous groupe de G. Montrer que $\overline{H}$ est abélien si et seulement si H l'est.

Exercice 8. Soit X une partie connexe de G, on note H_X le sous-groupe engendré par X, c'est-à-dire :

$$H_X = \bigcup_{n \geq 1} (X \cup X^{-1})^n.$$

1. Montrer que si X contient le neutre e, alors H_X est connexe.
2. Soient X_1, X_2 deux parties connexes de G contenant l'identité et

   $$X = \{x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1},\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}.$$

   Montrer que la fermeture de H_X est connexe.

   Remarque : si $X_1 = X_2 = G$, ce groupe est appelé le groupe dérivé topologique de G.

Exercice 9 (Composante neutre)**.** Soit G_0 la composante connexe de e.

1. Montrer que G_0 est fermée.
   Remarque : il peut arriver que G_0 ne soit pas ouvert ; voir un contre-exemple dans l'exercice suivant.
2. Montrer que xG_0 est la composante connexe de x. Montrer que G_0 est stable par conjugaison.
3. Montrer que si H est un sous-groupe ouvert inclus dans G_0, alors $H = G_0$.
4. Montrer que si G est connexe, alors pour tout voisinage V de e, on a $G = H_V$, où la notation H_V est définie dans l'exercice 4.
5. Montrer que G_0 est ouverte si et seulement si il existe un voisinage connexe de e.

Exercice 10 (Axiomes de séparation dans un groupe)**.** On rappelle les propriétés suivantes pour un espace topologique X.

(T_0) $\forall x, y \in X,\ \exists U$ ouvert, $(x \in U$ et $y \notin U)$ ou $(x \notin U$ et $y \in U)$;
(T_1) $\forall x, y \in X,\ \exists U$ ouvert, $x \in U$ et $y \notin U$;
(T_2) $\forall x, y \in X,\ \exists U, V$ ouverts, $x \in U,\ y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Démontrer que si G est un groupe topologique, ces trois propriétés sont équivalentes. [Par principe de translation, on peut supposer que $x = e$. Pour montrer que $(T_0) \Rightarrow (T_1)$, remarquer que $e = L_y i(y)$ et $y = L_y i(e)$. Pour montrer que $(T_1) \Rightarrow (T_2)$, utiliser $f : G^2 \to G$, $(g, g') \mapsto g^{-1}x^{-1}yg'$.]

Exercice 11 (Sous-groupes de $\mathbb{R}$)**.**

1. Soit H un sous-groupe non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $a = \inf(H \cap \,]0, +\infty[)$.
   (a) Montrer que si a est non nul, alors $H = a\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que si a est nul, alors H est dense dans $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire que tout sous-groupe de $\mathbb{R}$ est soit cyclique, soit dense.
2. On veut étudier le groupe $H = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, où α est un réel.
   (a) On suppose que $\alpha = \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$, $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Montrer que $H = \frac{d}{v}\mathbb{Z}$, où $d = \mathrm{pgcd}(u, v)$.
   (b) On suppose α irrationnel. Montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire que tout élément de $[-1, 1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) En déduire aussi qu'il existe une puissance de 2 dont l'écriture décimale commence par 12345.
   (e) On considère le groupe G, quotient de $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{Z}^2$ muni de la topologie quotient. On note $\pi : \mathbb{R}^2 \to G$ la projection naturelle. Pour θ irrationnel fixé, on note H_0 le sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ formé des couples (x, y) satisfaisant à $y = \theta x$, H son image par la projection π et $\tilde{H}$ la saturation de H_0, c'est-à-dire : $\tilde{H} = \pi^{-1}(\pi(H_0))$. Démontrer que $\tilde{H}$ est dense dans $\mathbb{R}^2$, en déduire que H est dense dans G et étudier la séparation dans le groupe quotient G/H.
3. On considère le sous-groupe $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ muni de la topologie métrique induite.
   (a) Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas discret.
   (b) Montrer que la composante connexe de l'élément neutre 0 est $\{0\}$.

Exercice 12. On considère l'application exponentielle

$$\mathrm{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*,\ z \mapsto e^{2\pi z}.$$

1. Montrer que Exp est un homomorphisme de groupes topologiques et déterminer son noyau.
2. On considère le pavé ouvert
$$P = \{z = x + iy \mid x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_0 + 1\},$$
   où $x_0 < x_1$, y_0 sont des réels. Montrer que la restriction de Exp à P est un homéomorphisme sur son image.
3. En déduire que pour chaque point w de $\mathbb{C}^*$, il existe un voisinage ouvert W tel que $\mathrm{Exp}^{-1}(W)$ est réunion disjointe d'ouverts connexes P_n et que pour chaque n, Exp réalise un homéomorphisme de P_n dans W.