

FICHE N°2

Exercice 13. On rappelle que $M_n(\mathbb{C})$ possède une norme multiplicative $\|(a_{ij})\| = n \max_{i,j} |a_{ij}|$.

1. Soit $S_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices dont les valeurs propres sont distinctes et $D_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables. Montrer que $D_n(\mathbb{C})$ et $S_n(\mathbb{C})$ sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire une preuve du théorème de Cayley-Hamilton.
3. Montrer que $D_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 14 (Forme normale des endomorphismes orthogonaux, symétriques et anti-symétriques). Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

1. Montrer que tout endomorphisme de E admet un sous-espace invariant $W \subset E$ avec $\dim W \leq 2$. (Considérer le polynôme caractéristique.)

2. Soit f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall \text{ sous-espace } V \subset E, \quad f(V) \subset V \implies f(V^\perp) \subset V^\perp.$$

Montrer qu'il existe une décomposition orthogonale $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} W_i$ en sous-espaces W_i stables par f et de dimension au plus 2. (Procéder par récurrence sur $\dim E$.)

3. En déduire que

- (a) tout endomorphisme symétrique est $O_n(\mathbb{R})$ -diagonalisable,
- (b) la matrice de tout endomorphisme orthogonal est $O_n(\mathbb{R})$ -semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_+} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{n_-} & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & R_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R_r \end{pmatrix}, \quad R_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}, \quad \theta_i \in \mathbb{R},$$

- (c) la matrice de tout endomorphisme antisymétrique est $O_n(\mathbb{R})$ -semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & \theta_i \\ -\theta_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_i \in \mathbb{R},$$

Exercice 15. Montrer que groupes classiques $O(n) = O_n(\mathbb{R}), U_n(\mathbb{C}), Sp(n), SO_n(\mathbb{R}), SU_n(\mathbb{C})$ sont compacts.

On rappelle que $Sp(n) := Sp(n, \mathbb{C}) \cap U_{2n}(\mathbb{C})$ et $Sp(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL_{2n}(\mathbb{C}) \mid A J_n A = J_n\}$, où $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. On rappelle que la sphère unité S_n de \mathbb{R}^{n+1} est connexe par arcs. On considère l'opération

$$\phi : SO_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad (A, x) \longmapsto Ax.$$

1. Montrer que ϕ se restreint en une opération transitive de $SO_n(\mathbb{R})$ sur la sphère S_{n-1} .
2. Calculer le sous groupe d'isotropie du point $N = (1, 0, \dots, 0)$.

3. Montrer que $SO_n(\mathbb{R})/SO_{n-1}(\mathbb{R})$ est un espace topologique compact homéomorphe à S_{n-1} .
4. Montrer par récurrence que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe.

Exercice 17 (#). On considère l'opération

$$\phi : SU_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n; \quad (A, x) \longmapsto Ax.$$

1. Montrer que ϕ se restreint en une opération transitive de $SU_n(\mathbb{C})$ sur la sphère S_{2n-1} .
2. Calculer le sous-groupe d'isotropie du point $(1, 0, \dots, 0)$.
3. Montrer que le quotient $SU_n(\mathbb{C})/SU_{n-1}(\mathbb{C})$ est un espace topologique compact homéomorphe à S_{2n-1} .
4. Montrer que par récurrence que $SU_n(\mathbb{C})$ est connexe.
5. Montrer que $U_n(\mathbb{C})/SU_n(\mathbb{C}) \cong S^1$. En déduire que $U_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Exercice 18. Soit \mathcal{H} le demi-plan de Poincaré : $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$.

1. Montrer que l'application

$$\phi : SL_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} : \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

est bien définie.

2. Montrer que ϕ est une action continue de $SL_2(\mathbb{R})$ sur \mathcal{H} . Calculer le groupe d'isotropie de i .
3. Montrer que \mathcal{H} est homéomorphe à $SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$.

Exercice 19. Soit un entier positif. On note $\mathcal{C} := \{C \in M_p(\mathbb{R}), C^2 = -1_p\}$ l'ensemble des structures complexes de \mathbb{R}^p . Il est muni de la topologie métrique induite.

1. Montrer que \mathbb{R}^p admet une structure complexe si et seulement si p est pair.
2. On suppose $p = 2n$. Soit C une structure complexe. Montrer que l'application

$$\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} : (a + ib, X) \rightarrow aX + bCX$$

définit une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel sur \mathbb{R}^{2n} de dimension n .

3. Déterminer le polynôme minimal de C . En déduire que C est $GL_n(\mathbb{C})$ -diagonalisable et $GL_{2n}(\mathbb{R})$ -semblable à J , où $J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.
4. Utiliser la matrice J pour donner un plongement naturel de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $GL_{2n}(\mathbb{R})$.
5. Montrer que \mathcal{C} est homéomorphe à $GL_{2n}(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{C})$.

Exercice 20. Soit n un entier positif. Choisissons des entiers $1 \leq p_1, p_2, \dots, p_r$ tels que $\sum_i p_i = n$. Nous appellerons drapeau de type $I = (p_1, p_2, \dots, p_r)$ toute famille $F_I = (F_1, F_2, \dots, F_r)$ de sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^n satisfaisant à :

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_r, \quad \dim F_i = p_1 + \dots + p_i, \quad 1 \leq i \leq r.$$

On désigne par \mathcal{F}_I l'ensemble des drapeaux de type I .

1. Reconnaître l'espace $\mathcal{F}_{(1, n-1)}$.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ opère de façon transitive sur \mathcal{F}_I .
3. Le I -drapeau standard est le drapeau tel que F_i soit engendré par les $\dim F_i$ premiers vecteurs de la base canonique de \mathbb{C}^n . Trouver le stabilisateur du I -drapeau standard (ce stabilisateur est appelé sous-groupe parabolique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).
4. En déduire une topologie sur \mathcal{F}_I .
5. Traiter le cas de l'action de $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{F}_{(1, \dots, 1)}$ (le stabilisateur du drapeau standard dans $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ est appelé tore maximal standard de $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$). En déduire une topologie d'espace compact sur $\mathcal{F}_{(1, \dots, 1)}$.

Exercice 21. Soit

$$S_i := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

où le bloc 0 est de dimension $(n-i) \times i$ pour $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/S_i$ est l'espace des i -plans de \mathbb{C}^n . Cet espace est appelé i -grassmannienne de \mathbb{C}^n .
2. Obtenez une autre présentation de la grassmannienne en faisant agir $U_n(\mathbb{C})$.

Exercice 22. Soit S_n^{++} l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives. Montrer que l'action de congruence réelle de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur S_n^{++} permet de réaliser S_n^{++} comme quotient de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par O_n .