

FICHE N°3

Produits semi-directs

Exercice 23 (Deux conventions). Soient H et K deux groupes topologiques avec une action continue de K sur H (sic!), définie par un morphisme $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$, $k \mapsto \varphi_k$, où $\text{Aut}(H)$ désigne le groupe des automorphismes continus de H . Le cours donne une définition du produit semi-direct $K \rtimes_{\varphi} H$. On peut en donner une variante qui a l'avantage de ne pas faire intervenir d'inverses. L'espace topologique sous-jacent est $H \times K$ et l'opération est définie par :

$$\forall (h, k), (h', k'), \quad (h, k) \cdot (h', k') = (h\varphi_k(h'), kk').$$

La notation consacrée pour cette version est $H \rtimes_{\varphi} K$ ou, si φ est implicite, $H \rtimes K$.

Vérifier que $H \rtimes_{\varphi} K$ est bien un groupe et que l'application suivante est un isomorphisme et un homéomorphisme : $\sigma : K \rtimes_{\varphi} H \rightarrow H \rtimes_{\varphi} K$, $(k, h) \mapsto (\varphi_k(h), k)$.

NB : L'application σ est parfaitement naturelle si on pense qu'après identification de sous-groupes du produit semi-direct isomorphes à H et K , l'action de K sur H s'identifie à la conjugaison dans le produit semi-direct. La formule $khk^{-1} = \varphi_k(h)$ donne $kh = \varphi_k(h)k$, ce qui justifie la formule pour σ .

Exercice 24 (Groupe affine). Soit \mathcal{E} un espace affine dirigé par l'espace vectoriel réel E de dimension finie n . Soit $\text{GA}(\mathcal{E})$, ou plus simplement GA , le groupe des bijections affines de \mathcal{E} et $\text{GL}(E)$, ou simplement GL , le groupe des bijections linéaires de E . On souhaite démontrer et interpréter un isomorphisme (non canonique) :

$$\text{GA}(\mathcal{E}) \simeq E \rtimes \text{GL}(E).$$

Soit T le groupe des translations. Il est isomorphe à E par l'application qui, à $v \in E$, associe la translation $t_v : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ de vecteur v . Soit O un point de \mathcal{E} et GA_O le stabilisateur de O .

1. Soit $f \in \text{GA}$ et $v \in E$. Donner une expression simple de ft_vf^{-1} . En déduire que T est distingué.
2. Vérifier que GA_O est isomorphe à GL . Montrer que toute application $f \in \text{GA}$ s'écrit de façon unique comme une composée $t_v \circ g$ (respectivement $g \circ t_v$) avec $v \in E$ et $g \in \text{GA}_O$.
3. Étant donné une application $f \in \text{GA}$, on note $df \in \text{GL}$ l'application linéaire associée (oui : c'est bien sa différentielle au sens de la géométrie différentielle...). L'utiliser pour définir la suite exacte :

$$1 \rightarrow T \longrightarrow \text{GA}(\mathcal{E}) \xrightarrow{d} \text{GL}(E) \rightarrow 1.$$

4. Exhiber une section de d et en déduire la structure de produit semi-direct (topologique).
5. On suppose à présent que \mathcal{E} est un espace affine euclidien. On note $\text{Is}(\mathcal{E})$ les groupe des isométries (affines) de \mathcal{E} et $\text{Is}(E)$ le groupe des isométries vectorielles de E . Montrer que l'on a un isomorphisme : $\text{Is}(\mathcal{E}) \simeq T \rtimes \text{Is}(E)$.

Exercice 25 (Groupes linéaires et orthogonaux). Soit n un entier naturel non nul.

1. Démontrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à un produit semi-direct topologique de $SL_n(\mathbb{R})$ par \mathbb{R}^* . Idem sur \mathbb{C} .
2. Démontrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à un produit semi-direct topologique de $SO_n(\mathbb{R})$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour quelles valeurs de n ce produit est-il direct (c'est-à-dire que l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur SO_n est triviale) ?

Exercice 26. Soit n un entier non nul et $i \in \{1, \dots, n\}$. On fait agir GL_n sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension i . Exhiber une structure de produit semi-direct sur le stabilisateur d'un sous-espace.

Exercice 27 (Groupe modulaire). On rappelle que $GL_2(\mathbb{C})$ agit par homographies sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par :

$$\forall g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}), \forall z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad g \cdot z = \frac{az + b}{cz + d},$$

où on utilise des conventions naturelles sur l'infini : $w/0 = \infty$ si $w \neq 0$ et $\frac{a\infty+b}{c\infty+d} = \frac{a}{c}$. Le noyau de cette action est $\mathbb{C}^* \text{Id}$. On appelle groupe modulaire le groupe engendré par les homographies et la conjugaison $\sigma : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ ($\sigma(\infty) = \infty$ et $\sigma(z) = \bar{z}$ si $z \in \mathbb{C}$).

1. Montrer que le groupe modulaire est naturellement un produit semi-direct de $PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Généraliser à une extension galoisienne \mathbb{L}/\mathbb{K} (exemple simple analogue au précédent : $\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q \dots$).

Exercice 28 (Groupe quaternionique). Soit Q le groupe

$$Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\},$$

où le produit est défini par :

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

où 1 est neutre et la multiplication par -1 suit les règles naturelles.

1. Quel est le centre Z de Q ? Quel est le quotient Q/Z ? Quels sont les ordres des éléments de Q ? Quels sont les sous-groupes de Q ?
2. Est-ce que Q est isomorphe à un produit semi-direct non trivial ?

Exercice 29 (Groupe de Heisenberg). Soit n un entier naturel non nul. On note G le sous-groupe de $GL_{n+2}(\mathbb{R})$ formé des matrices de la forme

$$[x, y, c] = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n & z \\ & \ddots & 0 & 0 & y_1 \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & & \ddots & y_n \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer le produit $[x, y, z][x', y', z']$ de deux éléments de G .
2. Quel est le centre Z de G ? Montrer que G/Z est isomorphe à \mathbb{R}^{2n} comme groupe topologique.
3. Est-ce que G est isomorphe au produit semi-direct de \mathbb{R}^{2n} par Z ?

Matrices nilpotentes

Exercice 30. 1. Est-ce que les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables ?

2. Est-ce qu'une matrice nilpotente est semblable à sa transposée ?
3. Pour J un bloc de Jordan nilpotent, quels sont les blocs de Jordan de J^2 ? Est-ce que J et J^2 ont une racine carrée ? Donner une caractérisation des classes de conjugaison de matrices nilpotentes qui ont une racine carrée.
4. Combien de classes de similitude de matrices 6×6 nilpotentes ?
5. Calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ & \ddots & \ddots & & n-1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & & \ddots & 2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Formes quadratiques

Exercice 31. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique.

0. Rappeler le théorème d'inertie de Sylvester.
1. Soit \mathcal{B} une base de E et $A := \text{mat}_{\mathcal{B}}(q)$. Montrer que $\text{sgn}(q) = (\#\text{Sp}'(A) \cap \mathbb{R}_+^*, \#\text{Sp}'(A) \cap \mathbb{R}_-^*)$, où $\text{Sp}'(A)$ est le spectre compté avec multiplicités. À partir de maintenant, on suppose que q est définie positive.
2. Soit \mathcal{C} une base orthonormale de E pour laquelle $\text{mat}_{\mathcal{C}}(q)$ est diagonale. Montrer que les vecteurs de \mathcal{C} sont des vecteurs directeurs des axes de l'ellipsoïde $\{x \in E \mid q(x) = 1\}$.
3. Orthogonaliser la forme quadratique $q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

Exercice 32. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint, i.e., $f^* = f$.

1. Montrer qu'il existe un sous-espace W de E de dimension 1 tel que

$$f(W) \subset W, \quad f(W^\perp) \subset W^\perp.$$

2. En déduire que toute matrice hermitienne est $U(n)$ -diagonalisable.
3. En déduire que toute matrice symétrique réelle est $O_n(\mathbb{R})$ -diagonalisable.

Exercice 33. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel et $q : E \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique hermitienne. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} pour laquelle la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}}(q)$ est la matrice

$$\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{-1, \dots, -1}_s, 0, \dots, 0)$$

et que (r, s) ne dépend que de q et pas de \mathcal{B} .

Exercice 34. On considère l'opération

$$\varphi : \text{GL}_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C}); \quad (g, A) \mapsto g \cdot A := (g^{-1})^* A g^{-1}.$$

1. Montrer que l'opération φ se restreint en une opération de $SL_2(\mathbb{C})$ sur

$$\mathfrak{u}_2(\mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}); A^* = -A\}.$$

2. Montrer que cette opération de $SL_2(\mathbb{C})$ induit une action continue de $PSL_2(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C})/\{\pm Id\}$. (La topologie sur $PSL_2(\mathbb{C})$ est la topologie quotient.)
3. Montrer que l'application $\det : \mathfrak{u}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ est $PSL_2(\mathbb{C})$ -invariante. En déduire qu'il existe un morphisme non trivial $f_1 : PSL_2(\mathbb{C}) \rightarrow O(3, 1)$.
(On verra plus tard que f_1 est injective et que $PSL_2(\mathbb{C}) \cong \text{Im} f_1 = SO(3, 1)_0$, la composante connexe de l'élément neutre de $O(3, 1)$.)

Exercice 35. Ici, on considère

$$\mathcal{C}_{a,b,c,d} = \left\{ \begin{pmatrix} x + yi \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid ax^2 + ay^2 + 2bx + 2cy + d = 0 \right\} \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,$$

$$\mathcal{CD} = \{\mathcal{C}_{a,b,c,d} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } \mathcal{C}_{a,b,c,d} : \text{un cercle ou une droite}\}.$$

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{C}_{a,b,c,d}$ soit un cercle ou une droite.
2. Trouver une équation du cône $\mathcal{C}_{a,b,c,d}$ centré en $(0, 0)$ qui coupe le plan $\{^t(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w = 1\}$ en $\mathcal{C}_{a,b,c,d}$.
3. Montrer que le cône $\mathcal{C}_{a,b,c,d}$ est le cône isotrope d'une forme quadratique hermitienne $q : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$.
4. En déduire une opération de $PSL_2(\mathbb{C})$ sur \mathcal{CD} . (Indication : Utiliser l'exercice 21.)