

FICHE N°4

Décomposition polaire

Exercice 36 (Maximalité du groupe orthogonal parmi les groupes compacts). Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient $O(n)$. Soit $A \in G$.

1. Soit $A = OS$ la décomposition polaire de A , i.e., $O \in O(n)$ et $S \in S_n^{++}$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $S^k \in G$.
2. Utilisant la norme N_2 , montrer que les valeurs propres de S toutes valent 1.
3. En déduire que $G = O(n)$.

Exercice 37. Soit H_n (resp. H_n^{++}) l'ensemble des matrices hermitiennes (resp. hermitiennes définies positives) de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que H_n est homéomorphe à H_n^{++} .

Exercice 38 (Décomposition polaire dans $GL(n, \mathbb{C})$).

1. Montrer que, pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe une unique $H \in H_n^{++}$ telle que $H^2 = A^*A$. Montrer que $U := AH^{-1} \in U(n)$.
2. En déduire que, pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe unique $H \in H_n^{++}$ et $U \in U(n)$ telles que $A = UH$.
3. Montrer que la réciproque de la multiplication $U(n) \times H_n^{++} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est continue.
4. En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$.
5. Démontrer comme à l'exercice 36 que le groupe $U(n)$ est un compact maximal de $GL_n(\mathbb{C})$.

Exercice 39 (Deux matrices réelles unitairement semblables sont orthogonalement semblables).

Soit H_n^+ l'ensemble des matrices hermitiennes positives de $M_n(\mathbb{C})$. Soit $Q \in H_n^+$ et on la décompose $Q = PDP^{-1}$, où $P \in U(n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$.

1. Soit $R := P\sqrt{D}P^{-1}$. Montrer que $R^2 = Q$ et il existe un polynôme $q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $R = q(Q)$.
2. En déduire que si $A \in M_n(\mathbb{C})$ commute avec Q , alors elle commute avec R .
3. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $U \in U(n)$ telles que $A = UBU^*$.
 - (a) Soit $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $X + iY = U$. Montrer qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}$ tel que $X + \eta Y \in GL_n(\mathbb{R})$. On pose $P := X + \eta Y$.
 - (b) Montrer que $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P{}^tBP^{-1}$. En déduire que B commute avec tPP .
 - (c) Soit $P = VR$ la décomposition polaire avec $V \in O(n)$ et $R \in S_n^{++}$. Montrer que B commute avec R . En déduire que A et B sont $O(n)$ -semblables.

Exercice 40 (Décomposition polaire dans $O(n, \mathbb{C})$). 1. Montrer que si $U \in U(n)$ satisfait à ${}^tUU = 1_n$ alors $U \in O(n)$.

2. Soit $M \in O(n, \mathbb{C})$ et $M = UH$ la décomposition polaire vue comme un élément de $GL_n(\mathbb{C})$, i.e., $U \in U(n)$ et $H \in H_n^{++}$. Montrer que ${}^tH({}^tUU) = H^{-1}$.
3. En déduire que $U \in O(n)$ et que H s'écrit comme $\exp(iA)$ où A est une matrice anti-symétrique réelle.
4. En déduire que $O(n, \mathbb{C})$ est homéomorphe à $O(n) \times \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1)}$.