

FICHE N°5

Méthodes différentielles

Exercice 41 (Un lemme technique). Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G tel que $\overset{\circ}{H} \neq \emptyset$. Montrer que H est ouvert et fermé.

Exercice 42. Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $U(n)$ le groupe unitaire d'ordre n et \mathcal{H}_n l'espace vectoriel réel des matrices hermitiennes d'ordre n . En utilisant l'application

$$f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}_n, \quad g \longmapsto g^*g,$$

montrer que $U(n)$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{C})$ et déterminer son espace tangent en I_n .

2. Soit $SU(n)$ le sous-groupe de $U(n)$ formé des éléments de déterminant 1. À l'aide de l'application

$$F : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}_n \times U(1), \quad g \longmapsto (g^*g, \det g),$$

montrer que $SU(n)$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{C})$ et déterminer son espace tangent en I_n .

3. Soit p et q deux entiers tels que $p + q = n$. On note $I_{p,q} = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ (avec p coefficients 1 et q coefficients -1) et soit $O(p, q)$ le groupe des matrices P telles que ${}^t P I_{p,q} P = I_{p,q}$. À l'aide de l'application

$$f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n, \quad P \longmapsto {}^t P I_{p,q} P,$$

démontrer que $O(p, q)$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer l'espace tangent en I_n . Démontrer que $SO(p, q) = O(p, q) \cap SL(n)$ a le même espace tangent en I_n que $O(p, q)$.

4. Mêmes questions avec le groupe de Heisenberg (exercice 29 feuille 3).

Exercice 43 (Deux présentations de l'algèbre de Lie). Soient G un sous-groupe fermé non discret de $GL_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et e son élément neutre. On pose

$$\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbb{K}) : \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G\}.$$

1. Montrer que $\mathfrak{g} \subset T_1 G$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow G$ une courbe de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = e$.
 - (a) Montrer qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $X_m = \log f(\frac{1}{m})$ est bien défini pour tout $m \geq m_0$.
 - (b) Montrer que la suite $\left(\frac{X_m}{\|X_m\|}\right)_{m \geq m_0}$ contient une sous-suite convergente. Quitte à extraire, on peut supposer que cette suite est une suite convergente.
 - (c) Montrer que $\lim_{m \rightarrow \infty} \exp\left(t \frac{X_m}{\|X_m\|}\right) \in G$. (Indication : Posons $\frac{t}{\|X_m\|} = \lambda_m + \mu_m$, où $\lambda_m \in \mathbb{Z}$ et $|\mu_m| \leq \frac{1}{2}$. Montrer que $\exp(\lambda_m X_m) \in G$ et que $\lim_{m \rightarrow \infty} \exp(\mu_m X_m) = 1$.)
3. En déduire que $\mathfrak{g} = T_1 G$.
4. Dans les exemples du cours et de l'exercice 29, reprendre la recherche de l'espace tangent en l'identité à l'aide de cette définition.

Exercice 44 ($SU(2)$ et $SO(3)$). On note \mathfrak{su}_2 l'espace des matrices de taille 2×2 anti-hermitiennes et de trace nulle.

1. Vérifier qu'on définit une action de $SU(2)$ sur \mathfrak{su}_2 par :

$$\forall g \in SU(2), \forall A \in \mathfrak{su}_2, \quad g \cdot A = gAg^*$$

et que cette action préserve le déterminant. Vérifier que le déterminant est une forme quadratique définie positive sur \mathfrak{su}_2 .

2. En déduire un morphisme différentiable $R : SU(2) \rightarrow O(3)$ dont l'image est, en fait, contenue dans $SO(3)$.
3. Montrer que le noyau de R est $\{\pm I_2\}$. En déduire que la différentielle dR_{I_2} de R en I_2 est un isomorphisme.
4. En déduire que l'on a une suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow SU(2) \xrightarrow{R} SO(3) \longrightarrow \{1\}.$$

Exercice 45 (SU_2 et SO_3 , variante pour construire R). Soit S_2 la sphère unité de \mathbb{R}^3 , d'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Considérons la *projection stéréographique* $\varphi : S_2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$, où $N = (0, 0, 1)$. Elle fait correspondre à un point $x = (x_1, x_2, x_3) \in S_2 \setminus \{N\}$ le point d'affixe z , intersection de la droite joignant N et x et du plan d'équation $x_3 = 0$.

1. Montrer que φ est déterminée par la formule

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3},$$

et que son inverse φ^{-1} est déterminée par

$$x_1 + ix_2 = \frac{2z}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

2. Si $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in SU_2$, on note $T(g)$ l'*homographie* définie par

$$T(g)(z) = \frac{\alpha z + \beta}{-\beta z + \alpha}.$$

Posons $R(g) = \varphi^{-1} \circ T(g) \circ \varphi$.

- (a) Expliciter $R(g)(x_1, x_2, x_3)$. En déduire qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f|_{S_2} = R(g)$.
- (b) En déduire que R est un morphisme de SU_2 dans SO_3 .
3. Conclure comme à l'exercice précédent que l'on a une suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow SU_2 \xrightarrow{R} SO_3 \longrightarrow \{1\}.$$

Exercice 46. En faisant agir $PSL(2, \mathbb{R})$ sur l'espace des matrices 2×2 symétriques, construire un isomorphisme $PSL(2, \mathbb{R}) \simeq SO_0(2, 1)$.

En reprenant l'exercice 35 de la feuille 3, interpréter cet isomorphisme en termes de cercles. (Indication : Étudier le groupe qui préserve l'ensemble des cercles dont le centre appartient à l'axe réel (Ox), i.e. dont l'équation a un coefficient $c = 0$.)

Exercice 47. Soit \mathcal{A} l'ensemble des matrices anti-symétriques dans $M_4(\mathbb{C})$. On considère l'opération

$$\mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}, \quad (g, M) \longmapsto gM^t g.$$

1. Rappelons que pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -d & -e \\ b & d & 0 & -f \\ c & e & f & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$, on a $\det(A) = \mathrm{Pf}(A)^2$, où $\mathrm{Pf}(A)$ est le *Pfaffien* (ou le *déterminant pfaffien*) de A défini par $\mathrm{Pf}(A) := af - be + cd$.

- (a) Montrer que l'application $\det : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ est invariant par cette action.
 (b) En considérant l'application continue

$$f : \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \longrightarrow \{\pm 1\}; \quad g \longmapsto \frac{\mathrm{Pf}(gM^t g)}{\mathrm{Pf}(M)}$$

pour une matrice $M \in \mathcal{A}$ inversible, montrer que le Pfaffien $\mathrm{Pf} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ est invariant par cette action.

2. En déduire qu'il existe une application continue $\varphi : \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$ non triviale.
 3. Ici, on veut montrer que $\ker \varphi \subset \mathbb{C}I_4$ par l'absurde. Supposons que, pour $g \in \ker \varphi$, il existe deux droites distinctes D et D' telles que ${}^t g(D) = D'$.
 (a) Montrer qu'il existe $J_0 \in \mathcal{A}$ telle que $\mathrm{rg}(J_0) = 2$. Soit $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ telle que $PD \subset \ker J_0$ et que $PD' \not\subset \ker J_0$.
 (b) Posons $M := {}^t P J_0 P \in \mathcal{A}$. Montrer que $MD = \{0\}$ et que $MD' \neq \{0\}$.
 (c) En utilisant l'hypothèse $gM^t g = M$, conclure.
 4. Montrer que $\ker \varphi = \{\pm I_2\}$. En déduire que $d\varphi_1$ est un isomorphisme et que φ est une surjection.
 5. Montrer qu'il existe une suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}_6(\mathbb{C}) \longrightarrow \{1\}.$$

6. En déduire qu'il existe une suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{SU}_4 \longrightarrow \mathrm{SO}_6 \longrightarrow \{1\}.$$

(Indication : Considérer un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ et de $\mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$.)

Exercice 48. Montrer que $\mathrm{PSL}_4(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathrm{SO}_0(3, 3)$.