

Compléments sur les sous-groupes fermés de GL_n

Ici, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1° Sous-variétés

Référence : Michel Demazure, *Catastrophes et bifurcations*, Ellipses, 1989.

Définition d'une sous-variété

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une partie M de $\mathbb{R}^d$ est une sous-variété si elle est une sous-variété en chacun de ses points. On dit que M est une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^d$ en l'un de ses points x_0 s'il existe un voisinage W de x_0 et un difféomorphisme $f : W \rightarrow U$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ qui envoie x_0 sur 0, tel que $M \cap W = f^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^m)$ (ici, on identifie $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$).

Une telle présentation donne un système d'équations de M au voisinage de x_0 : on note les composantes de f ainsi :

$$\forall x \in V, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_d(x)),$$

alors $M \cap V$ est l'ensemble des x qui sont les solutions de

$$(*) \quad f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_{d-m}(x) = 0.$$

Remarquons que le système $(*)$ est non dégénéré, au sens où les différentielles des f_i en x_0 sont linéairement indépendantes : par exemple, on peut dire que leurs matrices sont les lignes de la matrice jacobienne de f , qui est inversible.

Deuxième caractérisation (équivalente)

À présent, soient $f_1, \dots, f_{d-m}$ des fonctions différentiables définies sur un voisinage W d'un point x_0 de $\mathbb{R}^d$; on suppose que $f_1(x_0) = \dots = f_{d-m}(x_0)$ (c'est accessoire) et que les différentielles $(df_i)_{x_0}$ ($1 \leq i \leq d-m$) sont linéairement indépendantes (c'est essentiel). Alors l'ensemble M des solutions du système $(*)$ ci-dessus est une sous-variété en x_0 .

En effet, par le théorème de la base incomplète, il existe des formes linéaires $u_1, \dots, u_m$ sur $\mathbb{R}^d$ telles que

$$((df_1)_{x_0}, \dots, (df_{d-m})_{x_0}, u_1, \dots, u_m)$$

soit une base du dual de $\mathbb{R}^d$. Mais alors, les fonctions $f_{d-m+1} = u_1, \dots, f_n = u_m$ sont différentiables et égales à leur différentielle et la fonction $f = (f_1, \dots, f_n) : W \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une application différentiable dont la différentielle en x_0 est inversible, donc un difféomorphisme local de W sur un voisinage de 0.

Espace tangent

On reprend les notations de l'un des paragraphes ci-dessus. L'espace tangent à M en x_0 est l'image de $\{0\} \times \mathbb{R}^m$ par l'inverse de la différentielle de f , $(df_{x_0})^{-1}$. C'est aussi l'intersection des formes linéaires :

$$T_{x_0}M = \bigcap_{i=1}^{d-m} \ker(df_i)_{x_0}.$$

Remarquons que cet espace est également l'intersection des noyaux des différentielles de toutes les fonctions différentiables nulles sur M .

Lignes de niveau d'une submersion (II-6.4)

Soit W un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : \rightarrow \mathbb{R}^e$ ($e \in \mathbb{N}^*$) une application différentiable. On suppose que f est une submersion en un point x_0 de W , c'est-à-dire que la différentielle de f en x_0 est une surjection de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^e$ (en particulier, $d \geq e$). Alors la ligne de niveau de f à laquelle appartient x_0 ,

$$M = f^{-1}(f(x_0)),$$

est une sous-variété en x_0 de dimension $d - e$ et son espace tangent en x_0 est

$$T_{x_0}M = \ker df.$$

En effet, si on note $f = (f_1, \dots, f_e)$ les composantes de f , les matrices des différentielles des $(df_i)_{x_0}$ sont les lignes de la matrice jacobienne de df_{x_0} . Puisque par hypothèse, la matrice jacobienne est de rang e , ses e lignes sont linéairement indépendantes. C'est terminé!

Application à SU_n

On peut montrer que le groupe unitaire $U_n(\mathbb{C})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en constatant que c'est l'image réciproque de l'identité I_n par la submersion

$$f : GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}_n, \quad f(g) = g^*g,$$

où $\mathcal{H}_n$ désigne l'espace des matrices hermitiennes. Voici la différentielle de f en I_n : $df_{I_n}(H) = H^* + H$. C'est une surjection puisqu'une matrice hermitienne A est l'image de $A/2$.

Pour $SU_n = U_n \cap SL_n$, on pense à la fonction $F = (f, \det) : GL_n \rightarrow \mathcal{H}_n \times \mathbb{C}^*$. Malheureusement, cette fonction n'est pas submersive. En effet, sa différentielle est l'application

$$dF_{I_n} : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{H}_n \times \mathbb{C}, \quad H \mapsto (H + H^*, \text{tr } H).$$

Or la trace d'une matrice hermitienne est réelle donc les éléments $(A, i\lambda)$ avec $A \in \mathcal{H}_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ n'ont pas d'antécédent par dF_{I_n} . On va s'en tirer, au prix de renoncer à un traitement global.

Comme le déterminant d'une matrice unitaire a pour module 1, il suffit, pour assurer qu'elle appartient à SU_n , de vérifier que l'argument du déterminant est nul. Mais l'argument n'est pas défini sur $\mathbb{C}^*$, d'où le besoin de se restreindre à un voisinage de I_n .

On montre donc que SU_n est une sous-variété en I_n . Puisque $\det I_n = 1$, il existe un voisinage W de I_n sur lequel le déterminant ne prend aucune valeur dans $\mathbb{R}^-$. Notons $\arg : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \rightarrow]-\pi, \pi[$ la détermination principale de l'argument. C'est la partie imaginaire de la réciproque de l'exponentielle $\exp :]0, +\infty[+ i] -\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, donc $\arg$ est une fonction différentiable et sa différentielle en 1 est :

$$\forall h \in \mathbb{C}, \quad d\arg_1(h) = (d\Im \exp^{-1})_1(h) = (d\Im)_0[(d\exp)_0]^{-1}(h) = \Im(h).$$

Par composition, il vient :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad d(\arg \circ \det)_{I_n}(H) = (d\arg)_1 \circ (d\det)_{I_n}(H) = \Im \text{tr } H.$$

Comme remarqué précédemment, $SU_n \cap W$ est l'image réciproque de $(I_n, 0)$ par l'application :

$$G : W \rightarrow \mathcal{H}_n \times \mathbb{R}, \quad g \mapsto (g^*g, \arg \det g),$$

dont la différentielle est :

$$dG_{I_n}(H) = (H^* + H, \Im \text{tr } H).$$

Pour $(A, \lambda) \in \mathcal{H}_n \times \mathbb{R}$, on a d'évidence :

$$A = B + B^*, \quad \lambda = \Im \operatorname{tr} B, \quad \text{où } B = \frac{1}{2}A + \frac{i\lambda}{n}I_n.$$

Ceci montre que G est une submersion en I_n , d'où SU_n est une sous-variété en I_n .

À présent, soit $g \in \mathrm{SU}_n$. La translation par g ,

$$L_g : \mathrm{GL}_n \rightarrow \mathrm{GL}_n, \quad h \mapsto gh$$

est un difféomorphisme et SU_n est une sous-variété en I_n , donc $L_g(\mathrm{SU}_n)$ est une sous-variété en $L_g(I_n) = g$.

2° Aparté : sous-groupes à un paramètre

Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On appelle sous-groupe à un paramètre de G un morphisme continu de $\mathbb{R}$ dans G .

Proposition. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ un morphisme continu. Il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \exp(tX).$$

DÉMONSTRATION. Montrons tout d'abord qu'un morphisme continu est automatiquement différentiable, ce qui en soi ne laisse pas de surprendre. On a, pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t).$$

Par continuité de φ , on peut intégrer cette relation : pour $a > 0$, on a :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \int_s^{s+a} \varphi(u) \, du = \int_0^a \varphi(s+t) \, dt = \int_0^a \varphi(s)\varphi(t) \, dt = \varphi(s) \int_0^a \varphi(t) \, dt.$$

La fonction dans le membre de gauche est dérivable. Il suffit donc de montrer que $\int_0^a \varphi$ est inversible pour a assez petit.

Fixons une norme sur l'espace des matrices. Il existe une boule centrée en I_n et contenue dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Pour a assez petit et pour $t \in [0, a]$, $\varphi(t)$ appartient à cette boule ; *a fortiori*, la valeur moyenne de φ sur $[0, a]$,

$$\frac{1}{a} \int_0^a \varphi(t) \, dt,$$

appartient à cette boule (convexité si on veut), donc $\int_0^a \varphi$ est inversible.

Dérivons la relation de morphisme par rapport à s et prenons $s = 0$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t).$$

On sait que l'unique solution de cette équation différentielle qui prend la valeur I_n en $t = 0$ est : $\varphi(t) = \exp tX$, où $X = \varphi'(0)$.

3° Espace tangent en l'identité à un groupe de Lie

Dans ce texte, on appelle groupe de Lie un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui est aussi une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit G un groupe de Lie dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Remarque. Un théorème dû à Cartan prouve que tout sous-groupe fermé est automatiquement une sous-variété (une condition topologique implique une propriété différentielle, comme dans le paragraphe précédent). Cependant, on n'utilisera pas ce théorème : sa preuve est peu éclairante et il est assez facile de montrer que les groupes classiques sont des sous-variétés.

On note $e = I_n$ le neutre de GL_n . Par définition, l'espace tangent à G en e est l'espace engendré par les vecteurs tangents en e à une courbe $\mathcal{C}^1$ tracée dans G et contenant e :

$$T_e G = \{\gamma'(0), \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow G, \mathcal{C}^1, \gamma(0) = e\}.$$

Proposition. Pour G un groupe de Lie dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $e = I_n$, on a :

$$T_e G = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G\}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\mathfrak{g}$ l'ensemble des X tels que le sous-groupe à un paramètre $\{\exp tX\}$ soit contenu dans G . Comme $\gamma(t) = \exp tX$ est une courbe satisfaisant à $\gamma(0) = e$, il est clair que pour $X \in \mathfrak{g}$, on a : $X = \gamma'(0) \in T_e G$.

Inversement, soit $X \in T_e G$. On fixe une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow G$ de classe $\mathcal{C}^1$, définie sur un voisinage de 0, telle que $\gamma(0) = e$ et $\gamma'(0) = X$.

On sait que l'exponentielle $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ a pour différentielle Id en 0, donc c'est un difféomorphisme d'un voisinage Ω de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers un voisinage Ω' de e dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Notons $\log : \Omega' \rightarrow \Omega$ le difféomorphisme réciproque. Pour m supérieur à m_0 convenable, $\gamma(1/m)$ appartient à Ω' , ce qui donne un sens à $X_m = \log \gamma(1/m)$. Noter que $\exp X_m = \gamma(1/m) \in G$.

La suite $(X_m/||X_m||)_{m \geq m_0}$ prend ses valeurs dans la sphère unité, qui est compacte. Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer qu'elle converge.

Soit alors $t \in \mathbb{R}$. Pour $m \geq m_0$, écrivons

$$\frac{t}{||X_m||} = \lambda_m + \mu_m, \quad \text{où } \lambda_m \in \mathbb{Z} \text{ et } \mu_m \in [0, 1[.$$

Comme la suite $(\exp X_m) = (\gamma(1/m))$ converge vers e , la suite (X_m) tend vers 0. Comme (μ_m) bornée, la suite $(\exp \mu_m X_m)$ converge vers e . Par suite, les suites $(\exp(tX_m/||X_m||))$ et $(\exp(\lambda_m X_m))$ convergent vers la même limite.

Or, pour tout m , $\exp(\lambda_m X_m) = \exp(X_m)^{\lambda_m}$ est un élément de G , qui est fermé. Par suite, la limite appartient aussi à G . Ainsi,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \exp t \frac{X_m}{||X_m||} \in G.$$

D'autre part, pour m assez grand, on constate que

$$X_m = \frac{1}{m} d \log \gamma'(0) + o\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} X + o\left(\frac{1}{m}\right).$$

On en déduit que la limite ci-dessus est :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \exp t \frac{X_m}{||X_m||} = \exp t \frac{X}{||X||},$$

d'où l'on déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tX/||X||)$ appartient à G , puis que X appartient à $\mathfrak{g}$.

4° Noyau de la différentielle d'un morphisme

Proposition. Soit $\varphi : G \rightarrow H$ un morphisme de classe $\mathcal{C}^1$ entre groupes de Lie. Soit e le neutre de G et $d\varphi_e$ la différentielle de φ en e . Alors :

$$\forall X \in \ker d\varphi_e, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp tX \in \ker \varphi.$$

DÉMONSTRATION. La différentielle de φ en e est une application linéaire de $T_e G$ dans $T_e H$. Soit $X \in \ker d\varphi_e$. D'après la caractérisation de l'espace tangent ci-dessus, on a : $\exp tX \in G$ pour tout t réel. On définit donc un sous-groupe à un paramètre par

$$\chi : \mathbb{R} \rightarrow H, \quad t \mapsto \varphi(\exp tX).$$

D'après la caractérisation des sous-groupes à un paramètre, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \chi(t) = \exp t\chi'(0), \quad \text{où } \chi'(0) = d\varphi_e(X).$$

À présent, si $X \in \ker d\varphi_e$, alors χ est constante, d'où $\exp(tX)$ appartient au noyau de φ .

Corollaire. Soit $\varphi : G \rightarrow H$ un morphisme de classe $\mathcal{C}^1$ entre groupes de Lie. Si le noyau de φ est discret, alors la différentielle de φ en le neutre e est injective. Si, de plus, les espaces tangents à G et H en leurs neutres ont la même dimension, alors φ est un difféomorphisme local. Si, de plus, H est connexe, alors φ est surjectif.

DÉMONSTRATION. Supposons que le noyau de φ est discret. Pour X dans le noyau de $d\varphi_e$, la proposition montre que le sous-groupe à un paramètre $\chi : t \mapsto \exp(tX)$ prend ses valeurs dans $\ker \varphi$. Comme le neutre est isolé dans le noyau, par connexité, χ est constant. Il en résulte que $d\varphi_e(X) = \chi'(0) = 0$, ce qui prouve l'injectivité de la différentielle.

Lorsque les dimensions des espaces tangents au départ et à l'arrivée sont égales, la différentielle est nécessairement surjective. Par le théorème d'inversion locale, φ est un difféomorphisme local sur un voisinage du neutre de G .

Il en résulte que l'image de φ a un intérieur non vide. Mais un tel sous-groupe est automatiquement ouvert (utiliser les translations!), si bien que l'image de φ est ouverte dans H . Elle est donc automatiquement fermée. En tenant compte de ce que H est connexe, il en résulte que φ est surjectif.