

Partiel du 6 avril 2012

Exercice 1 : axiomes de séparation

Soit G un groupe topologique, e son neutre. On considère les propriétés suivantes :

(T_0) pour tout couple $(x, y) \in G \times G$ tel que $x \neq y$, il existe un ouvert V tel que $(x \in V$ et $y \notin V)$ ou $(x \notin V$ et $y \in V)$;

(T_1) pour tout couple $(x, y) \in G \times G$ tel que $x \neq y$, il existe un ouvert V tel que $x \in V$ et $y \notin V$;

(T_2) pour tout couple $(x, y) \in G \times G$ tel que $x \neq y$, il existe deux ouverts V et W tels que $(x \in V \setminus W$ et $y \in W \setminus V)$.

Il est clair que $(T_2) \Rightarrow (T_1) \Rightarrow (T_0)$. On va montrer que ces propriétés sont équivalentes pour un groupe topologique (c'est faux pour un espace topologique en général).

1. On suppose que la propriété (T_0) est satisfaite.
 - (a) Soit x un élément de G distinct de e . On suppose que V est un ouvert de G contenant x mais pas e . Montrer que xV^{-1} est un ouvert de G contenant e mais pas x .
 - (b) Prouver la propriété (T_1).
2. On suppose que la propriété (T_1) est satisfaite. Soient x et y deux éléments distincts de G et U un ouvert contenant xy^{-1} mais pas e . On note $f : G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto xgy^{-1}h$.
 - (a) Montrer que $f^{-1}(U)$ contient une partie de la forme $V_1 \times V_2$, où V_1 et V_2 sont deux ouverts contenant e .
 - (b) En déduire la propriété (T_2).

Exercice 2 : étude d'un produit semi-direct

Soit n un entier naturel non nul. On identifie \mathbb{R}^n à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices ayant n lignes et 1 colonne. On note I_n la matrice identité de format $n \times n$. On note G l'ensemble des matrices $g \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui admettent une décomposition en blocs de la forme suivante :

$$g = \begin{pmatrix} g_0 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } g_0 \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n.$$

1. Vérifier que G est un sous-groupe fermé de $\text{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$.
2. On note H (resp. K) la partie de G formées des matrices g telles que l'on ait, avec les notations ci-dessus :

$$g_0 = I_n \quad (\text{resp. } v = 0).$$

Montrer que H et K sont des sous-groupes fermés de G et que H est distingué.

3. Montrer que G est isomorphe à un produit semi-direct topologique $H \rtimes K$. Expliciter le morphisme d'action $K \rightarrow \text{Aut}(H)$ qui définit ce produit semi-direct.
4. Exhiber un isomorphisme entre G/H et K .
5. Exhiber un isomorphisme entre G et un groupe bien connu.

Problème

Soient n et k deux entiers naturels tels que l'on ait : $1 \leq k \leq n - 1$. On note $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$ l'espace des matrices complexes de taille $n \times k$ et \mathcal{M}_0 la partie de \mathcal{M} formée des matrices de rang k . (Aucune des colonnes d'une telle matrice n'est nulle.)

Dans ce problème, on appelle *pivot* d'une colonne non nulle le coefficient non nul d'indice maximal (le plus bas). On appelle *matrice échelonnée* une matrice de \mathcal{M}_0 , c'est-à-dire de taille $n \times k$ de rang k , dont la suite des indices des pivots (i_1, \dots, i_k) est strictement croissante. On appelle *type* d'une telle matrice la partie $I = \{i_1, \dots, i_k\}$.

On dit qu'une matrice échelonnée est *réduite* si tous les pivots valent 1 et si les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leur ligne (si le pivot de la ligne m est sur la ligne i_m , les coefficients d'indice (i_m, j) sont nuls pour $j > m$).

On note \mathcal{E} l'ensemble des matrices échelonnées et \mathcal{E}_r l'ensemble des matrices échelonnées réduites. On note \mathcal{P} l'ensemble des parties à k éléments de $\{1, \dots, n\}$. Pour I élément de \mathcal{P} , on note \mathcal{E}_I l'ensemble des matrices échelonnées réduites de type I et E_I la matrice dont les seuls coefficients non nuls valent 1 et sont en position (i_m, m) pour $1 \leq m \leq k$.

Le groupe $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ agit sur \mathcal{M}_0 par multiplication à droite. On rappelle que toute orbite de cette action contient une unique matrice échelonnée réduite.

Enfin, on note B le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices triangulaires supérieures.

1. Action de B sur les matrices échelonnées

- Montrer que la multiplication à gauche définit une action de B sur \mathcal{M}_0 , qui se restreint à une action sur \mathcal{E} .
- Montrer que B stabilise chacune des parties \mathcal{E}_I , $I \in \mathcal{P}$.
- Montrer plus précisément que les orbites de l'action de B dans \mathcal{E} sont les \mathcal{E}_I , $I \in \mathcal{P}$.

2. Action de $B \times \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ sur \mathcal{M}_0

On veut faire agir $B \times \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ sur \mathcal{M}_0 par :

$$\forall (b, g) \in B \times \mathrm{GL}_k(\mathbb{C}), \forall A \in \mathcal{M}_0, \quad (b, g) \cdot A = bAg^{-1}.$$

- Justifier rapidement que cela définit bien une action continue.
- Démontrer que chaque orbite de $B \times \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ dans \mathcal{M}_0 contient une unique matrice de la forme E_I , $I \in \mathcal{P}$.
- Exemple : on suppose que $k = 1$, si bien que \mathcal{M}_0 s'identifie à $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Selon la valeur de $A \in \mathcal{M}_0$, pour quel i est-ce que $E_{\{i\}}$ appartient à l'orbite de A ?
- Exemple : on suppose que $k = 2$ et $n = 4$. Selon la valeur de $\varepsilon \in \mathbb{C}$, pour quel I est-ce que E_I appartient à l'orbite de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

3. Grassmannienne des k -plans de \mathbb{C}^n et action de B

Soit \mathcal{G} l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de \mathbb{C}^n . L'action naturelle de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur \mathcal{G} est transitive. Soit V_k l'espace engendré par les k premiers vecteurs de la base canonique et P le stabilisateur de V_k dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

On note $\pi : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{G}$ l'application qui, à une matrice A de rang k , associe l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A .

- (a) Rappeler pourquoi l'action de $GL_n(\mathbb{C})$ sur \mathcal{G} est transitive et comment en déduire une topologie sur \mathcal{G} .
- (b) Montrer que π induit une bijection $\bar{\pi} : \mathcal{M}_0/GL_k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{G}$.
- (c) Prouver que $\bar{\pi}$ est un homéomorphisme. On pourra s'inspirer du diagramme suivant et le compléter :

$$\begin{array}{ccc}
 GL_n(\mathbb{C}) & & \mathcal{M}_0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 GL_n(\mathbb{C})/P & & \mathcal{M}_0/GL_k(\mathbb{C}) \\
 & \searrow \sim & \swarrow \bar{\pi} \\
 & & \mathcal{G}
 \end{array}$$

- (d) Établir une bijection naturelle entre l'ensemble des B -orbites dans \mathcal{G} et l'ensemble des $B \times GL_k(\mathbb{C})$ -orbites dans \mathcal{M}_0 .
- (e) Pour $I \in \mathcal{P}$, on note $\mathcal{G}_I = \pi(\mathcal{E}_I)$. Déduire de ce qui précède que les orbites de B dans \mathcal{G} sont les parties \mathcal{G}_I , $I \in \mathcal{P}$.

On note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{C}^n et (e_1^*, \dots, e_n^*) sa base duale. Pour m compris entre 0 et n , on note V_m l'espace vectoriel engendré par les m vecteurs (e_1, \dots, e_m) .

4. Adhérence des B -orbites dans l'espace projectif (cas $k = 1$)

Dans cette question, on suppose que $k = 1$. Alors, \mathcal{M}_0 s'identifie à $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. On fixe $i \in \{1, \dots, n\}$ et on note $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{\{i\}}$.

- (a) Soit $W \in \mathcal{G}_i$. Déterminer la suite finie $(\dim W \cap V_m)_{0 \leq m \leq n}$.
- (b) Montrer que $V_i \setminus \{0\}$ est fermé dans \mathcal{M}_0 . En déduire que l'adhérence de \mathcal{G}_i est contenue dans $\pi(V_i \setminus \{0\})$.
- (c) Montrer que l'adhérence de \mathcal{G}_i est la réunion des \mathcal{G}_j , $j \leq i$.

5. Adhérence des B -orbites : plans de \mathbb{C}^4

Dans cette question, on suppose que $k = 2$ et $n = 4$.

- (a) On suppose que $k = 2$. Pour $I = \{i_1, i_2\} \in \mathcal{P}$ et $W \in \mathcal{G}_I$, déterminer la suite finie $(\dim W \cap V_m)_{0 \leq m \leq 4}$.
- (b) (Difficile.) Soit $I = \{i_1, i_2\}$ et $J = \{j_1, j_2\}$. Prouver que \mathcal{G}_I est inclus dans l'adhérence de \mathcal{G}_J si, et seulement si $i_1 \leq j_1$ et $i_2 \leq j_2$.