Université Lyon 1 – 2011-2012
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Partiel du 6 avril 2012

Exercice 1 : axiomes de séparation

1. (a) Comme l'inversion $\iota : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ est un homéomorphisme (continue et involutive), V^{-1} est un ouvert. Comme la translation à gauche $L_x : G \to G$, $g \mapsto xg$ est un homéomorphisme (elle est continue, de même que $L_x^{-1} = L_{x^{-1}}$), xV^{-1} est un homéomorphisme. Enfin, x appartient à V donc $e = xx^{-1}$ appartient à xV^{-1}. D'autre part, $x = xe^{-1}$ n'appartient pas à xV^{-1} car e n'appartient pas à V. (Ceci prouve la propriété T_1 pour $y = e$.)

   (b) (L'idée sous-jacente est le principe de translation.) Soit x et y deux éléments distincts de G, de sorte que e et $x^{-1}y$ sont distincts. Par (T_0), il existe un ouvert U qui contient un seul des deux éléments e et x. Quitte à remplacer U par xU^{-1} si U contient x mais pas e, on voit qu'il existe donc un ouvert U de G qui contient e mais pas $x^{-1}y$. Posant alors $V = xU$, on voit que V contient $x = xe$ mais pas $y = xx^{-1}y$.

2. (a) La continuité du produit $m : G \times G \to G$ entraîne celle de l'application f. On en déduit que $f^{-1}(U)$ est un ouvert et il contient (e, e). Par définition de la topologie produit, $f^{-1}(U)$ contient donc un ouvert de la forme $V_1 \times V_2$, où V_1 et V_2 sont deux ouverts contenant e.

   (b) Le choix de V_1 et V_2 donne : $xV_1y^{-1}V_2 \subset U$, de sorte que $xV_1y^{-1}V_2$ contient xy^{-1} mais pas e. Par suite, l'intersection $xV_1 \cap (y^{-1}V_2)^{-1}$ est vide. Prenant $V = xV_1$ et $W = (y^{-1}V_2)^{-1} = V_2^{-1}y$, on obtient deux ouverts d'intersection vide contenant respectivement x et y.

Exercice 2 : un produit semi-direct

1. Avec des notations évidentes, on a :

$$\begin{pmatrix} g_0 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0' & v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 g_0' & v + g_0 v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} g_0 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} g_0^{-1} & -g_0^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   ce qui prouve que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$. Il est fermé car c'est l'image réciproque de $(0, \ldots, 0, 1)$ par l'application continue $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$, $g = (a_{ij}) \mapsto (a_{n+1,1}, \ldots, a_{n+1,n}, a_{n+1,n+1})$.

2. Dans la formule ci-dessus, on voit que si $g_0 = g_0' = I_n$ (resp. si $v = v' = 0$), alors $g_0 g_0' = I_n$ et $g_0^{-1} = I_n$ (resp. $v + g_0 v' = 0$ et $-g_0^{-1}v = 0$) donc le produit de deux éléments et l'inverse d'un élément de H (resp. K) sont dans H (resp. K). Les applications

$$\begin{pmatrix} g_0 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto g_0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} g_0 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto v$$

   sont continues donc H et K sont fermés. Enfin, avec des notations claires, on a :

$$\begin{pmatrix} g_0 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & g_0 v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   ce qui prouve que H est distingué.

3. On applique le critère du cours : on a $G = HK$ car
$$\begin{pmatrix} g_0 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
De plus, l'intersection $K \cap H$ est triviale. Enfin, les deux groupes H et K sont fermés. Par suite, G est isomorphe au produit semi-direct topologique de H par K.
L'action de K sur H provient de la conjugaison : pour $g_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^n$, on a :
$$\begin{pmatrix} g_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & g_0 v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. L'application
$$\varphi : G \longrightarrow K, \quad \begin{pmatrix} g_0 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} g_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
est, d'après la formule du produit dans la première question, un morphisme de groupes. De plus, il est surjectif et son noyau est H donc il induit un isomorphisme $G/H \to K$.

5. Au groupe affine, bien sûr ! Première version : $H \simeq \mathbb{R}^n$, $K \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et l'action de K sur H est l'action naturelle : le produit semi-direct est celui qu'on a vu dans le TD du 22/3. Deuxième version : on constate que G stabilise l'espace affine E formé des vecteur $(x_1, \dots, x_{n+1})$ tels que $x_{n+1} = 1$. On identifie $\mathbb{R}^n$ à E en envoyant $X = (x_1, \dots, x_n)$ sur $(x_1, \dots, x_n, 1)$. Alors, l'action de $g \in G$ sur $X \in \mathbb{R}^n$ est : $g \cdot X = g_0 X + v$, exactement l'action du groupe affine.

Problème

On note $\mathrm{GL}_k = \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Préambule : action de B en termes d'opérations sur les lignes.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,k}$ et $b = (b_{ij}) \in B$, on note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A. On constate que les lignes de bA sont obtenues de la façon suivante :
$$\left\{ \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & b_{11}L_1 + b_{12}L_2 + \cdots + b_{1n}L_n \\ L_2 & \leftarrow & \qquad\quad\ b_{22}L_2 + \cdots + b_{2n}L_n \\ \vdots & & \qquad\qquad\qquad\quad \ddots \\ L_n & \leftarrow & \qquad\qquad\qquad\qquad b_{nn}L_n \end{array} \right. \qquad \text{avec } b_{11} \cdots b_{nn} \neq 0.$$

En termes plus explicites, par des multiplications par un élément de B, on peut remplacer une ligne par une combinaison linéaire faisant intervenir la ligne avec un coefficient non nul et, éventuellement, des lignes situées strictement plus bas.

1. (a) L'action de GL_n se restreint à une action de B sur les matrices $n \times k$. Cette action préserve le rang ($\mathrm{rg}\, bA = \mathrm{rg}\, A$ si $b \in B$ et $A \in \mathcal{M}$) donc stabilise $\mathcal{M}_0$.
Supposons que $A = (a_{ij})$ soit échelonnée de type $I = \{i_1, \dots, i_k\}$. Montrons que bA est échelonnée de même type. Soit $m \in \{1, \dots, k\}$. Il s'agit de voir que le coefficient de la i_m-ème ligne de bA n'est pas nul et que les coefficients situés en-dessous le sont. Or, d'après la description ci-dessus du produit bA, le coefficient d'indice (i_m, m) est $b_{i_m i_m} a_{i_m i_m} \neq 0$ et les coefficients d'indice (i, m) pour $i > i_m$ sont des sommes de $b_{i,\ell} a_{\ell m}$ avec $a_{\ell m} = 0$ car $\ell > i_m$.
(b) Déjà vu.
(c) Puisque $E_I \in \mathcal{E}_I$, il suffit de montrer que pour $E \in \mathcal{E}_I$, $E = (a_{ij})$, on a : $E \in B\mathcal{E}_I$. En termes d'opérations sur les lignes, il suffit de montrer qu'on peut obtenir E à partir de E_I

avec les opérations du préambule. Partant de E_I, on effectue les transformations successives suivantes sur les lignes de la matrice :

$$\begin{array}{ccr} L_1 & \to & L_1 + a_{11}L_{i_1} + a_{12}L_{i_2} + \cdots + a_{1k}L_{i_k} \\ L_2 & \to & L_2 + a_{21}L_{i_1} + a_{22}L_{i_2} + \cdots + a_{2k}L_{i_k} \\ \vdots & & \\ L_{i_1} & \to & a_{i_11}L_{i_1} + a_{i_12}L_{i_2} + \cdots + a_{i_1k}L_{i_k} \\ L_{i_1+1} & \to & L_{i_1+1} + a_{i_1+1,2}L_{i_2} + \cdots + a_{i_1+1,k}L_{i_k} \\ \vdots & & \end{array}$$

On procède de la première à la dernière ligne et on n'utilise à chaque étape que des lignes situées en-dessous : de la sorte, à la i-ème étape, les lignes d'indice $> i$ de la matrice courante sont les mêmes que celles de E_I.

2. (a) Pour $(b, g) \in B \times \mathrm{GL}_k$ et $A \in \mathcal{M}_0$, on a : $\mathrm{rg}(bAg^{-1}) = \mathrm{rg}\, A$ donc $(b, g) \cdot A \in \mathcal{M}_0$. Pour $(b, g), (b', g') \in B \times \mathrm{GL}_k$ et $A \in \mathcal{M}_0$, on a :

$$(b, g) \cdot (b', g') \cdot A = (b, g) \cdot b'A(g')^{-1} = bb'(g')^{-1}g^{-1} = bb'A(gg')^{-1} = (bb', gg') \cdot A,$$

ce qui prouve qu'on a une action.

La continuité de l'action résulte de ce que les coefficients de bAg^{-1} sont des fractions rationnelles en les coefficients de b, A et g dont le dénominateur (le déterminant de g) n'est pas nul.

On aurait pu simplement invoquer l'action connue de $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_k$ sur $\mathcal{M}$ et la préservation du rang.

(b) **Existence.** Soit $A \in \mathcal{M}_0$. D'après le rappel de cours, il existe $I \in \mathcal{P}$ et $g \in \mathrm{GL}_k$ tels que $Ag \in \mathcal{E}_I$. Mais d'après 1.(c), il existe $b \in B$ tel que $bAg = E_I$.

Unicité. Supposons que $bAg^{-1} = E_I$ et que $b'A(g')^{-1} = E_{I'}$ (notations évidentes). Alors on a : $Ag^{-1} = b^{-1}E_I \in \mathcal{E}_I$ et $A(g')^{-1} = (b')^{-1}E_{I'} \in \mathcal{E}_{I'}$. Ainsi, Ag^{-1} et $A(g')^{-1}$ sont égales, car elles sont toutes deux échelonnées réduites et dans l'orbite de A sous GL_k. Il en résulte que $I = I'$ donc que $E_I = E_{I'}$.

(c) Ici, $k = 1$. Soit i l'indice du pivot de A (vue comme matrice colonne). Comme il n'y a qu'une seule colonne, A est échelonnée réduite donc $A \in \mathcal{E}_{\{i\}}$, d'où il résulte que $E_{\{i\}}$ appartient à l'orbite de A.

(d) On note A_ε la matrice de l'énoncé. Pour $\varepsilon = 0$, on voit que : $A_0 = E_{\{1,3\}}$, si bien que $A_0 \in \mathcal{E}_{\{1,3\}}$.

Pour $\varepsilon \neq 0$, on fait les opérations $L_1 \to L_1 - \varepsilon^{-1}L_2$ et $L_2 \to \varepsilon^{-1}L_2$ (ce qui revient à multiplier A_ε à gauche par un élément convenable de B), ce qui transforme A_ε en $E_{\{2,3\}}$. Matriciellement, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon^{-1} & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \varepsilon^{-1} & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que c'est $E_{\{2,3\}}$ qui appartient à l'orbite de A_ε.

3. (a) La transitivité est un avatar du théorème de la base incomplète. Soit $V \in \mathcal{G}$ et $(e'_1, \ldots, e'_k)$ une base de V. On la complète en une base $\mathbf{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ de $\mathbb{C}^n$. Soit g la matrice de passage de la base canonique $\mathbf{e}$ à la base $\mathbf{e}'$. Alors g envoie V_k sur V, où V_k est l'espace engendré par les k premiers vecteurs de $\mathbf{e}$. Ainsi, l'orbite de V_k est l'ensemble $\mathcal{G}$ entier.

Soit P le stabilisateur de V_k : il est constitué des matrices par blocs de la forme

$$p = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ 0 & p_3 \end{pmatrix} \quad \text{où } p_1 \in \mathrm{GL}_k,\ p_R \in \mathrm{GL}_{n-k},\ p_2 \in \mathcal{M}_{k,n-k}.$$

Le sous-groupe P est fermé dans GL_n. On munit G/P de la topologie-quotient et on la transporte sur $\mathcal{G}$ via la bijection $\mathrm{GL}_n/P \to \mathcal{G}$, $gP \mapsto gV_k$ induite par l'application orbitale $\mathrm{GL}_n \to \mathcal{G}$, $g \mapsto gV_k$. (Les ouverts de $\mathcal{G}$ sont les parties de la forme $\Omega \cdot V_k$, Ω ouvert de GL_n.

(b) D'une part, π est surjective par le théorème de la base incomplète (compléter les k colonnes d'une matrice dans $\mathcal{M}_0$ donne une base de $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

D'autre part, soient A et A' deux éléments de $\mathcal{M}_0$, on note (C_j) et (C'_j) leurs colonnes. Si $\pi(A) = \pi(A')$, c'est que (C_j) et (C'_j) sont deux bases du même espace vectoriel. Il existe donc $h = (h_{ij}) \in \mathrm{GL}_k$ tel que

$$\forall j,\ 1 \leq j \leq k, \quad C'_j = \sum_{\ell=1}^{k} h_{\ell j} C_\ell.$$

Cette relation peut s'écrire : $A' = Ah$, ce qui exprime que A et A' sont dans la même orbite sous GL_k. Inversement, si $A' = Ah$ pour $h \in \mathrm{GL}_k$, les colonnes de A' sont combinaisons linéaires des colonnes de A et vice-versa : elles engendrent donc le même espace vectoriel et $\pi(A') = \pi(A)$.

Ainsi, A et A' de $\mathcal{M}_0$ ont la même image par π si, et seulement si A et A' sont dans la même orbite sous GL_k. Ceci permet de définir une application injective $\overline{\pi} : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{G}$, qui est surjective car π l'est.

(c) Aparté en forme de mea culpa. La question parle de topologie sur un quotient X/G (ici, $\mathcal{M}_0/\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$), il s'agit donc sans doute de topologie quotient... Mais le cours ne définit pas une telle topologie ! On va tâcher d'y remédier en quelques lignes.

> Si un groupe topologique G agit continûment sur un espace topologique X, la topologie quotient sur X/G est la topologie dont les ouverts sont les parties Ω telle que $p^{-1}(\Omega)$ est ouvert dans X, où $p : X \to X/G$ est la projection canonique. C'est la plus fine pour laquelle p est continue.

Réponse à la question. Notons F l'application de GL_n dans $\mathcal{M}_0$ qui, à une matrice g, associe ses k premières colonnes. On va vérifier que F passe au quotient, et plus précisément que F induit une bijection $\Phi : \mathrm{GL}_n/P \to \mathcal{M}_0/\mathrm{GL}_k$.

Soit $p \in P$, matrice décomposée par blocs comme ci-dessus. Soit $g \in \mathrm{GL}_n$, on note $A = F(g)$ les k premières colonnes de g et B les $n-k$ dernières. Alors :

$$gp = \begin{pmatrix} Ap_1 & B' \end{pmatrix}, \quad \text{où } B' = Ap_2 + Bp_3.$$

Par suite, on a : $F(gp) = F(g)$. Inversement, si g et g', éléments de GL_n, ont la même image par F, c'est que les k premières colonnes de g et g' engendrent le même espace ; il existe donc $p_1 \in \mathrm{GL}_k$ tel que $F(g') = F(g)p_1$. On peut trouver $p \in P$ de sorte que p_1 soit le bloc supérieur gauche de p. Alors, $F(gp) = F(g)p_1 = F(g')$.

Ceci permet de définir une injection Φ de GL_n/P dans $\mathcal{M}_0/\mathrm{GL}_k$. Par surjectivité de $\mathrm{GL}_n \to \mathcal{M}_0$, on en déduit que Φ est bijective.

Du point de vue topologique, F est continue donc la composée $\mathrm{GL}_n \xrightarrow{F} \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_0/\mathrm{GL}_k$ l'est aussi. Par définition de la topologie quotient sur GL_n/P, Φ est aussi continue.

Par ailleurs, F est ouverte. En effet, soit Ω un ouvert de GL_n et $g \in \Omega$. Il s'agit de montrer que $F(\Omega)$ est un voisinage de $F(g)$. Par suite, par définition de la topologie quotient sur $\mathcal{M}_0/\mathrm{GL}_k$, dont les ouverts sont les parties X dont l'image inverse dans $\mathcal{M}_0$ est ouverte, la composée $\mathrm{GL}_n \to \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_0/\mathrm{GL}_k$ est ouverte. Par définition de la topologie quotient sur GL_n/P, Φ est ouverte.

(d) Tout d'abord, on peut identifier canoniquement les B-orbites dans $\mathcal{M}_0/\mathrm{GL}_k$ et les $B\times\mathrm{GL}_k$-orbites dans $\mathcal{M}_0$. En effet, la surjection de passage au quotient $\mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_0/(B\times\mathrm{GL}_k)$, $A \mapsto BA\,\mathrm{GL}_k$ est constante sur les GL_k-orbites : si $A' = Ah$ pour $h \in \mathrm{GL}_k$, alors $BA'\,\mathrm{GL}_k = BAh\,\mathrm{GL}_k = BA\,\mathrm{GL}_k$. Elle induit donc une application $\mathcal{M}_0/\mathrm{GL}_k \to \mathcal{M}_0/(B\times\mathrm{GL}_k)$, qui est toujours surjective. De plus, les images de $A\,\mathrm{GL}_k$ et $A'\,\mathrm{GL}_k$ sont dans la même B-orbite SSI il existe $b \in B$ tel que $A'\,\mathrm{GL}_k = bA\,\mathrm{GL}_k$ SSI $BA'\,\mathrm{GL}_k = BA\,\mathrm{GL}_k$.

Dans un deuxième temps, on peut identifier $\mathcal{M}_0/\mathrm{GL}_k$ et $\mathcal{G}$ via $\overline{\pi}$ et l'action de B commute à $\overline{\pi}$. Par suite, $\overline{\pi}$ permet d'identifier les B-orbites de ces deux ensembles.

Variante. Si on veut procéder directement, on part de $A \in \mathcal{M}_0$. On lui associe $\pi(A) \in \mathcal{G}$ et on note $\theta(A)$ l'orbite de $\pi(A)$ sous B. L'application $\theta : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{G}/B$ est surjective (car π et la projection $\mathcal{G} \to \mathcal{G}/B$ le sont). Si $A' = bAg^{-1}$ avec $b \in B$ et $g \in \mathrm{GL}_k$, alors $\pi(A') = \pi(bA) = b\pi(A)$ donc $\theta(A') = \theta(A)$. Inversement, si A et A' appartiennent à $\mathcal{M}_0$ et si $\theta(A) = \theta(A')$, alors il existe $b \in B$ tel que $\pi(A') = b\pi(A) = \pi(bA)$, si bien qu'il existe $g \in \mathrm{GL}_k$ tel que $A' = bAg^{-1}$. Par suite, θ passe au quotient et induit une bijection $\overline{\theta} : \mathcal{M}_0/\mathrm{GL}_k \to \mathcal{G}/B$.

(e) D'après ce qui précède, les B-orbites dans $\mathcal{G}$ proviennent des $B\times\mathrm{GL}_k$-orbites dans $\mathcal{M}_0$. Or, par 2.(c), chaque $B\times\mathrm{GL}_k$-orbite dans $\mathcal{M}_0$ contient une unique matrice de la forme E_I avec $I \in \mathcal{P}$. Or on a : $\mathcal{E}_I = (B\times\mathrm{GL}_k)\cdot E_I$. Or l'image par $\overline{\theta}$ de l'orbite de E_I est l'image par π de l'orbite de E_I dans.

4. (a) Soit $W \in \mathcal{G}_i$. Alors W est la droite engendrée par un vecteur de la forme

$$^t\!\begin{pmatrix} * & \dots & * & \neq 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

où le pivot est en position i. Puisque V_m est engendré par les m premiers vecteurs de la base canonique, on en déduit que $W \cap V_m$ est de dimension 0 si $m < i$ et de dimension 1 si $m \geq i$.

(b) La partie $V_i \setminus \{0\}$ est le lieu d'annulation, dans $\mathcal{M}_0$, des formes linéaires $e^*_{i+1}, \dots, e^*_n$. Par conséquent, $V_i \setminus \{0\}$ est fermé dans $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

Par suite, comme $\pi^{-1}(\mathcal{G}_i)$ est contenu dans $V_i \setminus \{0\}$, son adhérence, qui est

$$\overline{\pi^{-1}(\mathcal{G}_i)} = \pi^{-1}(\overline{\mathcal{G}_i}),$$

est elle aussi contenue dans $V_i \setminus \{0\}$. Il en résulte que $\overline{\mathcal{G}_i}$ est contenu dans $\pi(V_i \setminus \{0\})$.

(c) Fixons $j \leq i$. Posons, pour $\varepsilon \in \mathbb{C}$:

$$v_\varepsilon = {}^t(0 \quad \cdots \quad 0 \quad \underset{(j)}{1} \quad \varepsilon \quad \cdots \quad \underset{(i)}{\varepsilon} \quad 0 \quad \cdots \quad 0).$$

Pour $\varepsilon \neq 0$, v_ε appartient à $\mathcal{G}_i$. De plus, v_ε tend vers e_j lorsque ε tend vers 0. Par suite, $\pi(e_j)$ appartient à l'adhérence de $\mathcal{G}_i$, si bien que $\mathcal{G}_j$ est contenu dans l'adhérence de $\mathcal{G}_i$.

Inversement, une droite W appartenant à $\pi(V_i \setminus \{0\})$ est engendrée par un vecteur v dont le pivot est en position $j \leq i$, si bien que l'on a : $W \in \mathcal{G}_j$.

En réunissant les deux remarques, on obtient :

$$\bigcup_{j\leq i} \mathcal{G}_j \subset \overline{\mathcal{G}_i} \subset \pi(V_i \setminus \{0\}) \subset \bigcup_{j\leq i} \mathcal{G}_j.$$