Université Lyon 1 – 2010-2011
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Sous-variétés

1 Sous-variétés

Référence : Michel Demazure, *Catastrophes et bifurcations*, Ellipses, 1989.

Les sous-variétés sont les parties des espaces $\mathbb{R}^n$ sur lesquelles on peut appliquer les méthodes du calcul différentiel. On généralise la situation bien connue de courbe du plan.

Il y a deux façons de présenter une courbe dans le plan : soit par un paramétrage (par exemple, $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ pour t réel), soit par des équations (par exemple, $x^2 + y^2 = 1$). Le théorème des fonctions implicites permet de trouver (de façon non constructive, cependant) un paramétrage d'une courbe définie par une équation au voisinage d'un point ; la théorie de l'élimination permet, dans certains cas, de trouver une équation pour une courbe paramétrée (en ≪ éliminant ≫ le paramètre).

À bien y regarder, la situation est semblable pour les sous-espaces vectoriels ou affines : un sous-espace peut être présenté par un système d'équations (par exemple $x+2y = 0$) ou par un paramétrage (par exemple $x = 2t$, $y = -t$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$). (Dans le cas vectoriel, cela revient à présenter un sous-espace comme le noyau d'une application linéaire ($(x, y) \mapsto x + 2y$) ou, *via* une famille génératrice, comme l'image d'une application linéaire ($t \mapsto (2t, -t)$). Des méthodes classiques fondées sur l'algorithme de Gauss permettent de passer d'une représentation à l'autre, c'est-à-dire de trouver un paramétrage d'un sous-espace donné par un système d'équations et inversement.

On aura donc deux façons de présenter un sous-variété : soit par un paramétrage, soit par des équations. Des théorèmes du types inversion locale ou fonctions implicites établiront un pont entre les deux présentations.

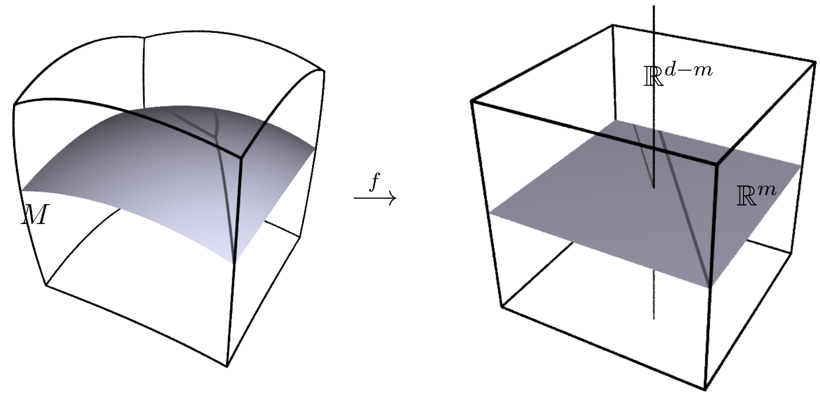
Quand on étudie une courbe paramétrée, on s'intéresse aux propriétés et aux invariants *géométriques* de la courbe : compacité, tangentes, longueur... On entend par là les propriétés qui ne dépendent pas du paramétrage. Ainsi, la longueur d'une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ est-elle invariante si on remplace γ par $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi : [c, d] \to \mathbb{R}^2$, où $\phi : [c, d] \to [a, b]$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ; au contraire, la norme du vecteur tangent $\gamma'(a)$ dépend du paramétrage.

L'étude des sous-variétés est donc conforme au thème principal du livre : étudier des propriétés invariantes sous l'action d'un groupe, ici celui des difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Ici, les seuls invariants que nous allons utiliser sont très basiques en géométrie différentielle : ce sont la dimension et l'espace tangent.

1.1 Définition d'une sous-variété

Première définition

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une partie M de $\mathbb{R}^d$ est une sous-variété si elle est une sous-variété en chacun de ses points. On dit que M est une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^d$ en l'un de ses points x_0 s'il existe un voisinage W de x_0 et un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ $f : W \to U$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ qui envoie x_0 sur 0, tel que $M \cap W = f^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^m)$ (ici, on identifie $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$).



Une telle présentation donne un système d'équations de M au voisinage de x_0 : on note les composantes de f ainsi :

$$\forall x \in W, \quad f(x) = (f_1(x), \ldots, f_d(x)),$$

alors $M \cap W$ est l'ensemble des x qui sont les solutions de

$$(*) \qquad f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_{d-m}(x) = 0.$$

Remarquons que le système $(*)$ est non dégénéré, au sens où les différentielles $(\mathrm{d}f_i)_{x_0}$ des f_i en x_0 sont linéairement indépendantes (ce sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^d$) : en effet, leurs matrices sont les lignes de la matrice jacobienne de f, qui est inversible.

Caractérisation par un système d'équations

À présent, soient $f_1, \ldots, f_{d-m}$ des fonctions différentiables définies sur un ouvert W de $\mathbb{R}^d$; on s'intéresse à l'ensemble M des solutions x du système

$$(*) \qquad f_1(x) = \cdots = f_{d-m}(x) = 0.$$

Soit x_0 une solution. On suppose que les différentielles $(\mathrm{d}f_i)_{x_0}$ $(1 \leq i \leq d-m)$ sont linéairement indépendantes : cette condition essentielle généralise la condition que le vecteur dérivé ne s'annule pas que l'on impose à une courbe paramétrée. Alors l'ensemble des solutions du système $(*)$ ci-dessus est une sous-variété en x_0.

En effet, par le théorème de la base incomplète, il existe des formes linéaires $u_1, \ldots, u_m$ sur $\mathbb{R}^d$ telles que

$$((\mathrm{d}f_1)_{x_0}, \ldots, (\mathrm{d}f_{d-m})_{x_0}, u_1, \ldots, u_m)$$

soit une base du dual de $\mathbb{R}^d$. Mais alors, les fonctions $f_{d-m+1} = u_1, \ldots, f_d = u_m$ sont différentiables et égales à leur différentielle et la fonction $f = (f_1, \ldots, f_d) : W \to \mathbb{R}^d$ est une application différentiable dont la différentielle en x_0 est inversible, donc un difféomorphisme local de W sur un voisinage de 0.

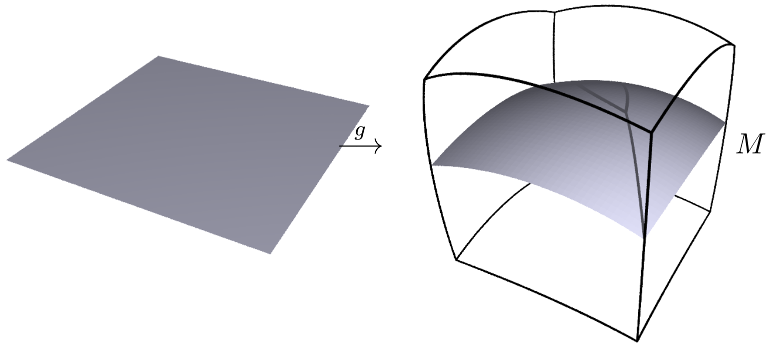
Paramétrage local d'une sous-variété

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^d$, x_0 un point de M, W un voisinage de x_0 et $f : W \to U$ un difféomorphisme qui envoie x_0 sur 0 et $M \cap W$ sur $(\{0\} \times \mathbb{R}^m) \cap U$. Notons U' l'ensemble des $(x'_1, \ldots, x'_m)$ de $\mathbb{R}^m$ tels que $(0, \ldots, 0, x'_1, \ldots, x'_m)$ appartient à U. L'application

$$\tilde{f}^{-1} : U' \to M \cap W, \quad (x'_1, \ldots, x'_m) \mapsto f^{-1}(0, \ldots, 0, x'_1, \ldots, x'_m)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective ; de plus, sa différentielle est injective : elle constitue un paramétrage de M au voisinage de x_0.

Inversement, supposons qu'il existe un ouvert U' de $\mathbb{R}^m$ contenant 0 et une application $g : U' \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ dont la différentielle en 0 est injective. Alors $g(U')$ est une sous-variété au point $x_0 = g(0)$.



En effet, fixons une base $(e_1, \ldots, e_m)$ de $\mathbb{R}^m$, qui est l'espace tangent à U' en 0. Notons, pour $1 \leq i \leq m$, $f_i = \mathrm{d}g_0(e_i)$. Par injectivité de $\mathrm{d}g_0$, la famille $(f_1, \ldots, f_m)$ est libre. On la complète en une base $(f'_1, \ldots, f'_{d-m}, f_1, \ldots, f_m)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$. Considérons alors l'application

$$F : \mathbb{R}^{d-m} \times U' \to \mathbb{R}^d, \quad (y_1, \ldots, y_{d-m}, x_1, \ldots, x_m) \mapsto g(x_1, \ldots, x_m) + \sum_{k=1}^{d-m} y_k f'_k.$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa différentielle en 0 est surjective puisque l'on a :

$$\forall k \leq d-m, \quad f'_k = \frac{\partial F}{\partial y_k}(0), \quad \text{et} \quad \forall i \leq m, \quad f_i = \mathrm{d}g_0(e_i) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(0).$$

Par le théorème d'inversion locale, F établit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre un voisinage de 0 et un voisinage de x_0, d'où on déduit que $g(U')$ est une sous-variété en x_0.

1.2 Espace tangent à une sous-variété

On reprend les notations de l'un des paragraphes ci-dessus.

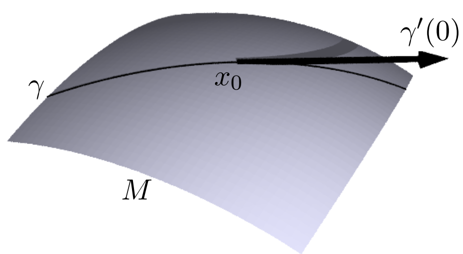
Définition de l'espace tangent

On définit l'espace tangent à la sous-variété M en un de ses points comme l'ensemble des vecteurs tangents à une courbe tracée dans M : un vecteur v de $\mathbb{R}^d$ est dit tangent à M en un point x_0 de M s'il existe une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$

$$\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \subset \mathbb{R}^d,$$

définie sur un voisinage de 0, telle que

$$\gamma(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = v.$$



On note $T_{x_0}M$ l'espace tangent à M en x_0. On verra plus loin que c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$.

Exemple 1 : Le vecteur nul est tangent à M en tout x_0 car c'est le vecteur tangent en 0 de la courbe constante $\gamma(t) = x_0$ pour tout t ; si v est un vecteur tangent, tout multiple αv, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$, en est un aussi puisque c'est le vecteur tangent en 0 à la courbe $t \mapsto \gamma(\alpha t)$. On traitera la somme de deux vecteurs tangents plus loin.

Exemple 2. Si M est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, si x_0 est un point de M et v un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^d$, alors v appartient à l'espace tangent à M en x_0 : en effet, pour t assez petit, $\gamma(t) = x_0 + tv$ appartient à M, ce qui définit une courbe (droite...) dont le vecteur tangent en 0 est v. Si M est un point, les seules courbes que l'on peut dessiner dans M sont constantes donc l'espace tangent à M en $\{x_0\}$ est formé du seul vecteur nul.

Exemple 3 : Si M est le sous-espace affine $\{0\} \times \mathbb{R}^m$ de $\mathbb{R}^d$, l'espace tangent à M en 0 est le sous-espace vectoriel $\{0\} \times \mathbb{R}^m$ de $\mathbb{R}^d$. C'est, en particulier, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$.

L'espace tangent comme espace vectoriel

Vu la règle de calcul de la différentielle d'une fonction composée (*chain rule* en anglais, plus concis), cette notion se comporte bien par difféomorphisme. Plus précisément, soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^d$, soit x_0 un point de M, soit W un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}^d$ et soit enfin $g : W \to W'$ un difféomorphisme. Alors l'espace tangent à $g(M)$ en $g(x_0)$ est l'image de l'espace tangent à M en x_0 par la différentielle de g :

$$T_{g(x_0)}(g(M)) = \mathrm{d}g_{x_0}(T_{x_0}M).$$

En effet, soit v un vecteur tangent à M en x_0 et $\gamma\,]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ une courbe telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$. Quitte à remplacer restreindre γ à un voisinage plus petit de 0, on peut supposer que tous les points de la courbe $\gamma(t)$ appartiennent à W. Alors la courbe $\tilde{\gamma} = g \circ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to g(M)$ a pour vecteur tangent en 0 :

$$\gamma'(0) = \mathrm{d}g_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = \mathrm{d}g_{x_0}(v).$$

Il en résulte que la différentielle de g envoie l'espace tangent à M en x_0 dans l'espace tangent à $g(M)$ en $g(x_0)$.

En appliquant ce résultat au difféomorphisme réciproque g^{-1} et en utilisant le fait que la réciproque de $\mathrm{d}g_{x_0}$ est la différentielle de g^{-1}, $\mathrm{d}g^{-1}_{g(x_0)}$, on obtient l'égalité.

Il en résulte que l'espace tangent à M en un point x_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$. En effet, c'est évident pour un sous-espace affine (exemple 3), la notion se comporte bien par difféomorphisme et toute sous-variété est difféomorphe à un sous-espace affine. Plus précisément, en reprenant les notations de 1.1, l'espace tangent à M en x_0 est l'image par la différentielle $\mathrm{d}f_0$, qui est linéaire, de l'espace tangent à $M' = \{0\} \times \mathbb{R}^m$ en 0, qui est le sous-espace vectoriel $\{0\} \times \mathbb{R}^m$ de $\mathbb{R}^d$ d'après l'exemple 3 ci-dessus.

Remarquons que c'est aussi une intersection de formes linéaires, les différentielles des équations qui définissent M :

$$T_{x_0}M = \bigcap_{i=1}^{d-m} \ker(\mathrm{d}f_i)_{x_0}.$$

Cet espace est également l'intersection des noyaux des différentielles de toutes les fonctions différentiables nulles sur M.

En effet, ces deux propriétés sont évidentes si M est un sous-espace affine et invariantes par difféomorphisme.

Exercice : Pour référence ultérieure, démontrer que l'espace tangent à M en x_0 est l'ensemble des vecteurs tangents $\gamma'(0)$ lorsque γ décrit les applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans M.

1.3 Lignes de niveau d'une submersion (II-6.4)

Soit W un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f :\to \mathbb{R}^e$ ($e \in \mathbb{N}^*$) une application différentiable. On suppose que f est une submersion en un point x_0 de W, c'est-à-dire que la différentielle de f en x_0 est une surjection de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^e$ (en particulier, on a : $d \geq e$). Alors la ligne de niveau de f à laquelle appartient x_0,

$$M = f^{-1}(f(x_0)),$$

est une sous-variété en x_0 de dimension $d - e$ et son espace tangent en x_0 est

$$T_{x_0}M = \ker \mathrm{d}f.$$

En effet, si on note $f = (f_1, \ldots, f_e)$ les composantes de f, les matrices des différentielles des $(\mathrm{d}f_i)_{x_0}$ sont les lignes de la matrice jacobienne de $\mathrm{d}f_{x_0}$. Puisque par hypothèse, la matrice jacobienne est de rang e, ses e lignes sont linéairement indépendantes. C'est terminé !

Application à SU_n

On peut montrer que le groupe unitaire $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en constatant que c'est l'image réciproque de l'identité I_n par la submersion

$$f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}_n, \quad f(g) = g^*g,$$

où $\mathcal{H}_n$ désigne l'espace des matrices hermitiennes. Voici la différentielle de f en I_n : $\mathrm{d}f_{I_n}(H) = H^* + H$. C'est une surjection puisqu'une matrice hermitienne A est l'image de $A/2$.

Pour $\mathrm{SU}_n = \mathrm{U}_n \cap \mathrm{SL}_n$, on pense à la fonction $F = (f, \det) : \mathrm{GL}_n \to \mathcal{H}_n \times \mathbb{C}^*$. Malheureusement, cette fonction n'est pas submersive. En effet, sa différentielle est l'application

$$\mathrm{d}F_{I_n} : \mathcal{M}_n \to \mathcal{H}_n \times \mathbb{C}, \quad H \mapsto (H + H^*, \mathrm{tr}\, H).$$

Or la trace d'une matrice hermitienne est réelle donc les éléments $(A, i\lambda)$ avec $A \in \mathcal{H}_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ n'ont pas d'antécédent par $\mathrm{d}F_{I_n}$. On va s'en tirer, au prix de renoncer à un traitement global.

Comme le déterminant d'une matrice unitaire a pour module 1, il suffit, pour assurer qu'elle appartient à SU_n, de vérifier que l'argument du déterminant est nul. Mais l'argument n'est pas défini sur $\mathbb{C}^*$, d'où le besoin de se restreindre à un voisinage de I_n.

On montre donc que SU_n est une sous-variété en I_n. Puisque $\det I_n = 1$, il existe un voisinage W de I_n sur lequel le déterminant ne prend aucune valeur dans $\mathbb{R}^-$. Notons $\arg : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \to]-\pi, \pi[$ la détermination principale de l'argument. C'est la partie imaginaire de la réciproque de l'exponentielle $\exp :]0, +\infty[+ i\,]-\pi, \pi[\to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, donc arg est une fonction différentiable et sa différentielle en 1 est :

$$\forall h \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{d}\arg_1(h) = (\mathrm{d}\Im \exp^{-1})_1(h) = (\mathrm{d}\Im)_0[(\mathrm{d}\exp)_0]^{-1}(h) = \Im(h),$$

où $\Im$ désigne la partie imaginaire d'un complexe. Par composition, il vient :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{d}(\arg \circ \det)_{I_n}(H) = (\mathrm{d}\arg)_1 \circ (\mathrm{d}\det)_{I_n}(H) = \Im\,\mathrm{tr}\, H.$$

Comme remarqué précédemment, $\mathrm{SU}_n \cap W$ est l'image réciproque de $(I_n, 0)$ par l'application :

$$G : W \to \mathcal{H}_n \times \mathbb{R}, \quad g \mapsto (g^* g, \arg\det g),$$

dont la différentielle est :

$$\mathrm{d}G_{I_n}(H) = (H^* + H, \Im \operatorname{tr} H).$$

Pour $(A, \lambda) \in \mathcal{H}_n \times \mathbb{R}$, on a d'évidence :

$$A = B + B^*, \quad \lambda = \Im \operatorname{tr} B, \quad \text{où } B = \frac{1}{2}A + \frac{i\lambda}{n} I_n.$$

Ceci montre que G est une submersion en I_n, d'où SU_n est une sous-variété en I_n.

À présent, soit $g \in \mathrm{SU}_n$. La translation par g,

$$L_g : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n, \ h \mapsto gh$$

est un difféomorphisme et SU_n est une sous-variété en I_n, donc $L_g(\mathrm{SU}_n)$ est une sous-variété en $L_g(I_n) = g$.

1.4 Morphismes de sous-variété et théorème d'inversion locale pour les sous-variétés

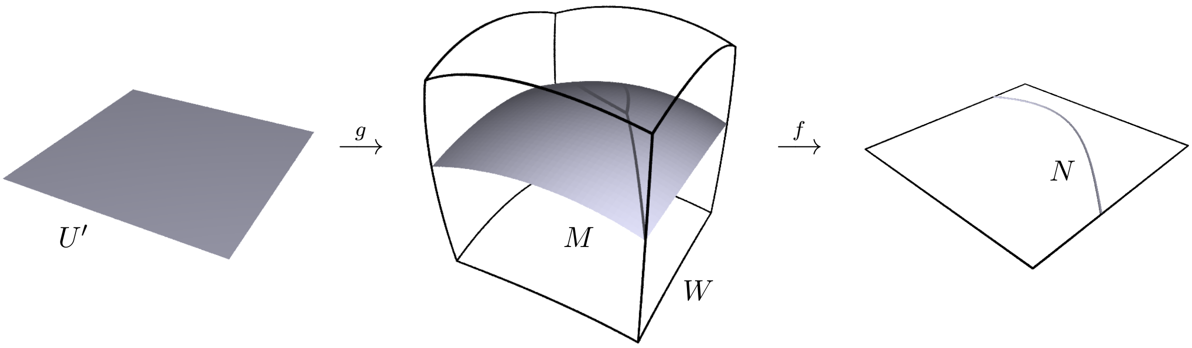
Deux définitions équivalentes

Soit M une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^d$ et N une sous-variété de $\mathbb{R}^e$. Il y a deux façons de penser ce qu'est un morphisme de sous-variétés $h : M \to N$.

La première façon consiste à dire qu'un morphisme de sous-variété est, localement, la restriction d'une application de classe $\mathcal{C}^1$ entre les espaces ambiants. Une application $f : M \to N$ est un morphisme de sous-variétés si, pour tout point x_0 de M, il existe un voisinage W de x_0 et une application $\widehat{f} : W \to \mathbb{R}^e$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que les restrictions de $\widehat{f}$ et f à $M \cap W$ coïncident.

Par exemple, si $\widehat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ et si la restriction f de $\widehat{f}$ à M envoie M dans N, alors f est un morphisme de sous-variétés.

Voici un autre point de vue. L'idée est de mettre des coordonnées sur M *via* un paramétrage local. Plus précisément, on a vu en 1.1 que pour x_0 dans M, il existe un voisinage W de x_0, un ouvert U' de $\mathbb{R}^m$ et une bijection de $g : U' \to M \cap W$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que $f : M \to N$ est un morphisme de sous-variétés au point x_0 si $f \circ g^{-1} : U' \to N$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est un morphisme de sous-variétés si c'en est un en tout point.



Les deux définitions coïncident. En particulier, la deuxième définition ne dépend pas du choix du paramétrage, ce que l'on peut vérifier directement. D'une part, l'existence de $\widehat{h}$ dans la première définition entraîne que $h \circ g^{-1}$, qui coïncide avec $\widehat{h} \circ g^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ dans la seconde. Pour l'implication inverse, il faut reprendre la méthode du paragraphe 1.1 pour fabriquer un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme à partir d'un paramétrage local.

Différentielle d'un morphisme entre sous-variétés

Soit $f : M \to N$ un morphisme entre des sous-variétés de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^e$. Soit x_0 un point de M, W un ouvert assez petit pour que f se prolonge, sur W, en $\widehat{f} : W \to \mathbb{R}^e$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit v est un vecteur tangent à M en x_0 et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ une courbe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$. La fonction $\hat{f} \circ \gamma$ définit une courbe $\mathcal{C}^1$ tracée dans N donc

$$(\mathrm{d}\widehat{f})_{f(x_0)}(v) = (\widehat{f} \circ \gamma)'(0) \in T_{f(x_0)}N.$$

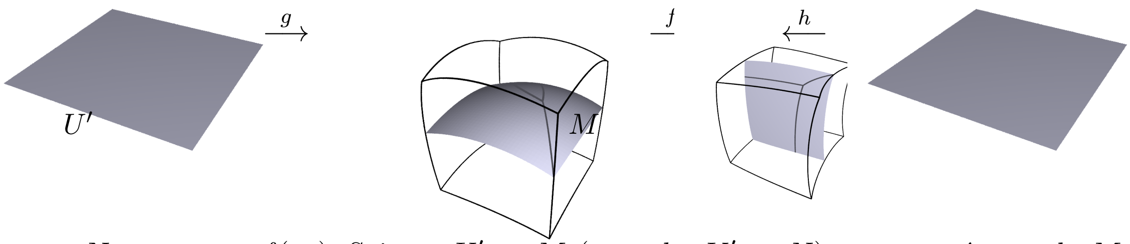
Ainsi, la différentielle de $\widehat{f}$ en x_0 envoie l'espace tangent à M en x_0 dans l'espace tangent à N en $f(x_0)$. On définit la différentielle de f en x_0 comme la restriction de $\mathrm{d}\widehat{f}_{x_0}$ à $T_{x_0}M$: c'est une application linéaire à valeurs dans $T_{f(x_0)}N$.

Exercice. Définir la différentielle de f à l'aide d'un paramétrage local ; vérifier que cela donne la même notion que précédemment. Démontrer que la différentielle de la composée de deux morphismes est la composée des différentielles. Montrer que la différentielle du morphisme réciproque, si ce dernier existe, est l'inverse de la différentielle du morphisme.

Inversion locale pour les sous-variétés

Définition. On appelle difféomorphisme entre sous-variétés un morphisme bijectif dont la réciproque est encore un morphisme.

Proposition. *Soit M (resp. N) une variété de dimension m (resp. n) dans $\mathbb{R}^d$ (resp. $\mathbb{R}^e$). Si $f : M \to N$ est un morphisme de sous-variétés et s'il existe un point x_0 de M tel que la différentielle de f en x_0 est bijective, alors il existe un voisinage V de x_0 et un voisinage V' de $f(x_0)$ tel que f induit par restriction un difféomorphisme de V sur V'.*



Notons $y_0 = f(x_0)$. Soit $g : U' \to M$ (resp. $h : V' \to N$) un paramétrage de M (resp. N) au voisinage de x_0 (resp. y_0). Quitte à remplacer U' par un ouvert plus petit, on peut supposer que $f \circ g(U') \subset k(V')$. Alors la composée $\tilde{k} = h^{-1} \circ f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, par hypothèse, sa différentielle en $0 = g^{-1}(x_0)$ est bijective : en effet, celle de g et de h le sont partout et celle de f l'est en x_0. Par le théorème d'inversion locale usuel appliqué à $\mathbb{R}^m$, il existe un voisinage U'' de 0 sur lequel $\tilde{f}$ est un difféomorphisme. Par suite, h en est un entre $g(U'')$ et $k(\tilde{h}(U''))$.