Université Claude Bernard–Lyon I
M2 Recherche de Mathématiques : Algèbres de Lie
Année 2005–2006

Exercices (1)
Corrigé (très) partiel

6° Un avatar de $\mathfrak{sl}_2$

a) *Montrer que l'on définit une structure d'algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}y \oplus \mathbb{K}z$ *en posant :* $[x, y] = z$, $[y, z] = x$, $[z, x] = y$. *On la note* $\mathfrak{so}_3$.
Voir ci-dessous.

b) *Ici,* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *Justifier la notation* $\mathfrak{so}_3$.
Considérons le produit scalaire canonique $\langle ., . \rangle$ sur $\mathbb{R}^3$. On note $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$. Son algèbre de Lie $\mathfrak{so}_3$ est formée par les éléments $g \in \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$ tels que $\exp(tg) \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il revient au même d'imposer que g préserve $\langle ., . \rangle$, au sens où

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^3, \quad \langle gX, Y \rangle + \langle X, gY \rangle = 0.$$

On voit alors que $\mathfrak{so}_3$ est constitué des matrices anti-symétriques, i.e. de la forme $\omega \wedge ?$, où $\omega \in \mathbb{R}^3$ et $\wedge$ est le produit vectoriel usuel. En notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique, posons :

$$x = e_1 \wedge ? = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = e_2 \wedge ? = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = e_3 \wedge ? = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que les relations $[x, y] = z$, $[y, z] = x$, $[z, x] = y$ sont satisfaites, et donc 1) elles définissent une algèbre de Lie et 2) c'est très raisonnable de l'appeler $\mathfrak{so}_3$!

c) *Ici,* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Montrer que* $\mathfrak{so}_3$ *est isomorphe à* $\mathfrak{sl}_2$. *Est-ce vrai si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *?*
On cherche un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (f, h, e) comme d'habitude. On va se débrouiller pour que h soit proportionnel à x –c'est une façon de faire, il y en a d'autres. On commence donc par diagonaliser $\mathrm{ad}(x)$, ce qui donne : $[x, y - iz] = i(y - iz)$ et $[x, y + iz] = -i(y + iz)$.
On pose donc $h = 2x/i$: les valeurs propres de $\mathrm{ad}(h)$ sont donc $-2, 0, 2$, ce qui est un bon départ. On pose alors $e = y - iz$, ça fait toujours h et e qui sont bons, puis on constate que $[e, y + iz]$ est proportionnel à h, ce qui permet de trouver $f = \alpha(y + iz)$ pour α convenable de sorte que $[e, f] = h$, et c'est fini.

On constate que l'isomorphisme construit n'est pas défini sur $\mathbb{R}$. De fait, $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ ne sont pas isomorphes. En effet, étant donné une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on lui associe un invariant numérique, la signature de la forme de Killing. (C'est parachuté à ce stade, mais ça deviendra naturel dès la semaine prochaine.) La forme de Killing est la forme bilinéaire définie par

$$\kappa : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(g \otimes g') = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(g) \circ \mathrm{ad}(g')).$$

Des calculs simples mais un peu fastidieux montrent que la forme de Killing est définie négative pour $\mathfrak{so}_3$, ce qui traduit que $\mathfrak{so}_3$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact, mais qu'elle ne l'est pas pour $\mathfrak{sl}_2$ (ce qui traduit que SL_2 n'est pas compact).