Université Claude Bernard–Lyon I
M2 Recherche de Mathématiques : Algèbres de Lie
Année 2005–2006

Exercices (2)
(corrigé très partiel)

Sur le cours
Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{z}$ son centre. J'ai dit imprudemment qu'il y avait un isomorphisme $[\mathfrak{g}/\mathfrak{z}, \mathfrak{g}/\mathfrak{z}] \simeq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. C'est faux en général : si on prend l'algèbre dite de Heisenberg, ayant pour base (x, y, z) satisfaisant :

$$[x, y] = z, \quad [x, z] = [y, z] = 0,$$

on voit que $\mathfrak{z} = \mathbb{K}z = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, et (donc) que $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ est abélienne, d'où $[\mathfrak{g}/\mathfrak{z}, \mathfrak{g}/\mathfrak{z}] = 0$.
En revanche, on a une application *bien définie et surjective*

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{z} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{z} \longrightarrow [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \qquad [\overline{x}, \overline{y}] \longmapsto [x, y],$$

où $\overline{x}$ est la classe de $x \in \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$.

En fait, on voit que la restriction de la projection $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ à $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ a pour image :

- d'une part, $\mathcal{D}(\mathfrak{g}/\mathfrak{z})$,
- d'autre part, elle est isomorphe à $\mathcal{D}\mathfrak{g}/(\mathfrak{z} \cap \mathcal{D}\mathfrak{g})$.

Donc $\boxed{\mathcal{D}(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}) \simeq \mathcal{D}\mathfrak{g}/(\mathfrak{z} \cap \mathcal{D}\mathfrak{g}).}$

Il faut reformuler la partie de la preuve où j'ai utilisé cette propriété fausse, à savoir :

Corollaire (du théorème de Lie) $\mathfrak{g}$ *résoluble* $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ *nilpotente.*

Démonstration. On montre qu'on peut supposer que $\mathfrak{z} = 0$. En effet, $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ est résoluble (car $\mathfrak{z}$, idéal abélien, est résoluble). Et surtout, comme $\mathfrak{z} \cap \mathcal{D}\mathfrak{g}$ est un idéal central de $\mathcal{D}\mathfrak{g}$, $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ est nilpotente si et seulement si $\mathcal{D}(\mathfrak{g}/\mathfrak{z})$ est nilpotente.
La suite de la preuve marchait bien.□

Isomorphisme $S(V_1 \oplus V_2) \simeq S(V_1) \otimes S(V_2)$
L'algèbre $S(V_1) \otimes S(V_2)$ est commutative (car $S(V_1)$ et $S(V_2)$ le sont). De plus, elle est engendrée par les éléments de la forme $v_1 \otimes 1$ et $1 \otimes v_2$ ($v_i \in V_i$).

<u>Première version</u> :, On vérifie que $S(V_1) \otimes S(V_2)$ satisfait la propriété universelle de l'algèbre symétrique. Pour A une algèbre commutative et $\varphi : V_1 \oplus V_2 \to A$, on définit $\Phi : S(V_1) \otimes S(V_2) \to A$ par $\Phi(p \otimes q) = \Phi_1(p)\Phi_2(q)$, où Φ_1 et Φ_2 sont les morphismes $S(V_i) \to A$ donnés par la propriété universelle de $S(V_i)$ à partir de la restriction $\varphi|_{V_i}$ de φ. On "vérifie" que c'est l'unique morphisme tel que blablabla.

<u>Deuxième version</u> : On définit $K : S(V_1) \otimes S(V_2) \to S(V_1 \oplus V_2)$ par : $p \otimes q \mapsto pq$ ($p \in S(V_1)$, $q \in S(V_2)$). Sens : l'injection naturelle $V_1 \hookrightarrow V_1 \oplus V_2$ donne un morphisme naturel $S(V_1) \to S(V_1 \oplus V_2)$, qui se trouve être injectif (par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, si on veut...) Par définition des opérations sur $S(V_1) \otimes S(V_2)$, K est un morphisme d'algèbres. Comme K et $\overline{J}$ se restreignent à des bijections réciproques sur des ensembles de générateurs de $S(V_1) \otimes S(V_2)$ et $S(V_1) \otimes S(V_2)$ ($v_1 \otimes 1$ et $1 \otimes v_2$ d'un côté, v_1 et v_2 de l'autre, avec $v_i \in V_i$), c'est que ce sont des isomorphismes.

<u>Troisième version</u> : avec des bases.

Soit (x_i) une base d'un espace vectoriel V, on montre que les monômes en les x_i forment une base de $S(V)$: en effet, les polynômes en les x_i, i.e. les combinaisons linéaires formelles de monômes, forment une algèbre commutative dont il est facile de voir qu'elle satisfait la propriété universelle de $S(V)$. On en déduit qu'elle s'identifie à $S(V)$.
Prenons alors une base $(x_i)_i$ de V_1, une base $(y_j)_j$ de V_2, alors les monômes en les x_i et les y_j forment une base de $S(V_1 \oplus V_2)$. Or, un tel monôme s'écrit de façon unique comme produit d'un monôme en les x_i et d'un monôme en les y_j, et on constate sans peine que $\overline{J}$ envoie un tel monôme sur le produit tensoriel des monômes :

$$\begin{aligned}\overline{J}(x_{i_1}\cdots x_{i_k}y_{j_1}\cdots y_{j_\ell}) &= \overline{J}(x_{i_1})\cdots\overline{J}(x_{i_k})\overline{J}(y_{j_1})\cdots\overline{J}(y_{j_\ell})\\ &= (x_{i_1}\otimes 1)\cdots(x_{i_k}\otimes 1)(1\otimes y_{j_1})\cdots(1\otimes y_{j_\ell})\\ &= x_{i_1}\cdots x_{i_k}\otimes y_{j_1}\cdots y_{j_\ell},\end{aligned}$$

Ainsi, $\overline{J}$ envoie une base de $S(V_1 \oplus V_2)$ sur une base de $S(V_1)\otimes S(V_2)$, c'est gagné.

Représentations de $\mathfrak{t}_2(\mathbb{K})$
On note $\mathfrak{t}_2(\mathbb{K}) = \mathbb{K}E_{11} \oplus \mathbb{K}E_{12} \oplus \mathbb{K}E_{22}$ l'algèbre de Lie des matrices 2×2 triangulaires supérieures, où les E_{ij} sont les matrices élémentaires.
a) Les sous-modules de la représentations identique $\rho : \mathfrak{t}_2 \to \mathfrak{gl}_2$ sont les sous-espaces stables par toutes les matrices triangulaires. On se convainc qu'il n'y en a qu'un seul de dimension 1, qui est engendré par v_1, le premier vecteur de la base canonique (v_1, v_2). La représentation simple associée est décrite par :

$$\rho_1\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11} \in \mathfrak{gl}(\mathbb{K}v_1).$$

Le quotient est engendré par la classe $\overline{v_2}$ de v_2 modulo $\mathbb{K}v_1$, et la représentation est décrite par :

$$\rho_2\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{pmatrix} = a_{22} \in \mathfrak{gl}(\mathbb{K}\overline{v_2}).$$

Attention : il est faux que $\rho \simeq \rho_1 \oplus \rho_2$. En effet, par exemple, la deuxième représentation possède deux sous-modules de dimension 1.
b) On a : $[E_{11}, E_{12}] = E_{12}$, $[E_{22}, E_{12}] = E_{12}$, ce qui montre que $\mathfrak{c} = \mathbb{K}E_{12}$ est un sous-module de la représentation adjointe. Comme il est de dimension 1, il est simple.
c) <u>Première version</u> : On note $h = E_{11} - E_{22}$ et $e = E_{12}$. On vérifie que pour M une représentation *de dimension finie*, $M^{(\lambda)}$ l'espace caractéristique de h associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $e.M^{(\lambda)} \subset M^{(\lambda+2)}$. Comme on est en caractéristique 0, tous les $\lambda + 2i$ $(i \in \mathbb{N})$ sont distincts, donc $M^{(\lambda+2i)} = 0$ pour i assez grand, car h n'a qu'un nombre fini de valeurs propres ! Donc $e^i M^{(\lambda)} = 0$ pour i assez grand, et ce, quel que soit λ. Donc e est nilpotent.
Pour conclure, on constate que $\mathrm{Ker}(e)$ est un sous-module non trivial de toute représentation M de dimension finie, donc, si M est simple, $M = \mathrm{Ker}(e)$ et e agit trivialement sur M.

<u>Deuxième version</u> : notre algèbre de Lie *est* résoluble (mais pas nilpotente) : $\mathcal{D}(\mathfrak{t}_2) = \mathbb{K}E_{12}$, $\mathcal{D}^2(\mathfrak{t}_2) = 0$. Le théorème de Lie entraîne que toute représentation simple de dimension finie est de dimension 1. Mais $E_{12} \in \mathcal{D}(\mathfrak{t})$, donc $\rho(E_{12})$ est nilpotent (comme dans toute représentation de dimension finie, simple ou pas), donc, comme on est en dimension 1, $\rho(E_{12})$ est nul.

Radical comme plus petit idéal tel que le quotient soit semi-simple
D'une part, le radical de $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ est trivial. En effet, soit $\overline{\mathfrak{a}}$ le radical de $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{a}$ l'image réciproque de $\overline{\mathfrak{a}}$ dans $\mathfrak{g}$ par la projection $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$. Bien sûr, $\mathfrak{a}$ contient $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$. Alors, $\mathfrak{a}$ est un idéal (comme image réciproque d'un idéal par un morphisme) et $\mathfrak{a}$ est résoluble (car l'idéal $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{a}$ et le quotient $\overline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ le sont), donc $\mathfrak{a} \subset \operatorname{rad}\mathfrak{g}$, donc $\mathfrak{a} = \operatorname{rad}\mathfrak{g}$ et $\overline{\mathfrak{a}} = 0$.

D'autre part, si $\mathfrak{r}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ est semi-simple, alors $\operatorname{rad}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{r}$. En effet, le quotient $(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{r})/\mathfrak{r}$ est isomorphe à $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})/(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{r})$, qui est résoluble comme quotient de $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$, donc $(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{r})/\mathfrak{r}$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, donc $(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{r})/\mathfrak{r} = 0$, donc $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{r} = \mathfrak{r}$, donc $\operatorname{rad}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{r}$.

Enfin, si $\mathfrak{r}$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ est semi-simple, alors $\operatorname{rad}\mathfrak{g} = \mathfrak{r}$. En effet, $\operatorname{rad}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{r}$ d'après ce qui précède. Oui, mais puisque $\mathfrak{r}$ est un idéal résoluble, on a en fait : $\mathfrak{r} \subset \operatorname{rad}\mathfrak{g}$. D'où : $\mathfrak{r} = \operatorname{rad}\mathfrak{g}$.

On applique ce dernier point pour $\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \subset \mathfrak{sl}_3$.