

Intérêt de ces quelques remarques probablement bien connues : faire vivre le groupe de Lorentz dans la géométrie de la sphère !

Probablement des erreurs de signe ici et là. Les calculs ne sont pas fiables.

1° Invariant anallagmatique de deux cercles

Etant donné deux cercles sécants dans $\mathbb{C}$, de rayons R et R' , dont les centres sont distants de D , quel est l'angle (non orienté) formé par leurs tangentes aux points d'intersection ? Réponse : son cosinus est donnée par

$$\rho = \frac{D^2 - R^2 - R'^2}{2RR'}.$$

Preuve : Soit O et O' les centres des cercles, on se place dans un repère d'origine O où O' a pour coordonnées $(D, 0)$. Le point d'intersection I est $(R \cos \theta, \pm R \sin \theta)$, où

$$(R \cos \theta - D)^2 + (R \sin \theta)^2 = R'^2, \quad \text{ou} \quad -2RD \cos \theta = R'^2 - R^2 - D^2.$$

L'angle des tangentes est $\pi + (\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IO'})$, avec

$$\cos(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IO'}) = \frac{-R \cos \theta (D - R \cos \theta) + (-R \sin \theta)^2}{RR'} = \dots = \frac{R^2 + R'^2 - D^2}{2RR'}.$$

On appelle ρ l'invariant anallagmatique des deux cercles. Noter que les cercles se coupent SSI $|R - R'| \leq D \leq R + R'$, et que ces inégalités traduisent exactement $-1 \leq \rho \leq 1$...

Noter que ce rapport est invariant par une homographie, car l'homographie est holomorphe, donc préserve l'angle des tangentes. On étend cette propriété à deux cercles qui ne se coupent pas nécessairement, par densité au sens de Zariski des paires de cercles sécants dans l'ensemble des paires de cercles.

Inversement, si deux paires de cercles ont le même invariant anallagmatique, il existe une homographie qui envoie une paire sur l'autre. On en verra une preuve plus bas.

L'invariant anallagmatique comme “cosinus”

Dans un repère orthonormé, un cercle possède une équation unique de la forme

$$(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy + d = 0.$$

Il y a toujours une vertu à uniformiser : si on veut rentrer les droites dans le même cadre, il n'y a qu'à ajouter une variable d'homogénéisation. Un cercle-droite possède toujours une équation de la forme

$$a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + d = 0,$$

unique à scalaire près, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Si $a \neq 0$, on récrit cette équation sous la forme

$$a \left[\left(x + \frac{b}{a} \right)^2 + \left(y + \frac{c}{a} \right)^2 - \frac{b^2 + c^2 - ad}{a^2} \right] = 0.$$

Ainsi, dans l'espace des $\mathbf{e} = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ représentant les équations de cercles-droites, les quadruplets qui représentent des cercles-droites non réduits à un point sont ceux pour lesquelles la forme quadratique suivante, de signature $(3, 1)$, est strictement positive :

$$Q(a, b, c, d) = b^2 + c^2 - ad > 0.$$

(Noter que $Q(\mathbf{e})/a^2$ est le carré du rayon du cercle : invariant par translation !) On vérifie que c'est vrai même si $a = 0$. Ainsi, les droites et les cercles de rayon non nul s'identifient aux droites de $\mathbb{R}^4$ engendrées par $\mathbf{e}$ tel que $Q(\mathbf{e}) > 0$.

Un calcul très simple montre que l'invariant anallagmatique de deux cercles sécants correspondant à $\mathbf{e} = (a, b, c, d)$ et $\mathbf{e}' = (a', b', c', d')$ s'écrit alors (au signe près ?) :

$$\frac{\Phi(\mathbf{e}, \mathbf{e}')}{\sqrt{Q(\mathbf{e})Q(\mathbf{e}')}},$$

où Φ est la forme polaire de Q . C'est presque un cosinus, à ceci près que Q n'est pas définie positive.

2° Action du groupe de Möbius sur les équations de cercles-droites

Par groupe de Möbius ou groupe modulaire, on entend le groupe engendré par les homographies et la conjugaison : c'est un produit semi-direct $\Gamma \simeq \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On sait que le groupe modulaire envoie un cercle-droite sur un cercle-droite. On en déduit une action sur l'ensemble des équations : si $h \in \Gamma$ et $\mathbf{e}$ est une équation, on pose :

$$h \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \circ h^{-1}.$$

Si $\mathbf{e}$ est l'équation d'un cercle-droite $\mathcal{C}$, on a :

$$z \in h(\mathcal{C}) \iff h^{-1}(z) \in \mathcal{C} \iff \mathbf{e}(h^{-1}(z)) = 0 \iff (h \cdot \mathbf{e})(z) = 0.$$

Ainsi, si $\mathbf{e}$ est l'équation de $\mathcal{C}$, $h \cdot \mathbf{e}$ est l'équation de l'image par h de $\mathcal{C}$.

Vérifions que cette action est linéaire (on aura une version plus conceptuelle de la chose très bientôt). Pour cela, il suffit de le faire sur des générateurs de Γ , à savoir les translations $\tau : z \mapsto z + (\alpha + i\beta)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), l'inverse $\iota : z \mapsto 1/z$ et la conjugaison $\sigma : z \mapsto \bar{z}$. On calcule facilement que si $\mathbf{e} = (a, b, c, d)$, on a :

$$\tau \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} a \\ b + \alpha a \\ c + \beta a \\ d + (\alpha^2 + \beta^2)a \end{pmatrix}, \quad \iota \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} d \\ b \\ -c \\ a \end{pmatrix}, \quad \sigma \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -c \\ d \end{pmatrix}.$$

On remarque de plus que pour ces générateurs, on a :

$$Q(\tau \cdot \mathbf{e}) = Q(\iota \cdot \mathbf{e}) = Q(\sigma \cdot \mathbf{e}) = Q(\mathbf{e}).$$

Ainsi, l'action de Γ sur les équations de cercles-droites provient d'un morphisme linéaire

$$\text{PSL}_2(\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \text{O}(3, 1).$$

Ce morphisme se trouve être presque un isomorphisme ! (Le groupe $\text{O}(3, 1)$ a quatre composantes connexes, on en retrouve deux.)

3° Action de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ sur les matrices hermitiennes

Faire agir $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ sur un espace de dimension réelle 4, en préservant une forme quadratique : on sait le faire de façon naturelle avec les matrices hermitiennes ! Considérons donc l'action par congruence de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ sur

$$\mathbb{H} = \{H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), {}^t\bar{H} = H\},$$

définie par :

$$\forall \gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{C}), \forall H \in \mathbb{H}, \quad \gamma \cdot H = {}^t\bar{\gamma}H\gamma.$$

La chose amusante, c'est que puisque γ est une matrice de déterminant 1 au signe près, on a :

$$\forall \gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}), \forall H \in \mathbb{H}, \quad \det({}^t \bar{\gamma} H \gamma) = \det(H).$$

Ainsi, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ préserve le déterminant, ou, plus agréablement, son opposé, qui est donné par :

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad -\det \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix} = b^2 + c^2 - ad.$$

On reconnaît la même forme quadratique que celle qui décrivait la position relative de deux cercles via leur équation.

4° Lien entre les deux présentations (d'après Christian Mercat)

A partir de $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on peut fabriquer une matrice hermitienne

$$H = \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix}$$

et un polynôme de degré ≤ 2 sur $\mathbb{R}^2$:

$$e_H(x, y) = a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + d.$$

Or, la matrice hermitienne H définit une forme quadratique hermitienne sur $\mathbb{C}^2$ via

$$\forall X = \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad q_H(X) = {}^t \bar{X} H X.$$

Un calcul évident donne, pour $x, y \in \mathbb{R}$:

$$q_H \begin{pmatrix} x+iy \\ 1 \end{pmatrix} = a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + d.$$

Ceci signifie que l'équation $e_H = 0$ est l'équation de l'intersection du cône isotrope de la forme $q_H(z, z')$ sur $\mathbb{C}^2$ avec le plan d'équation $z' = 1$, ou, plus précisément :

Le cercle-droite d'équation $e_H = 0$ est la projection du cône isotrope de q_H dans $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$.

Il est bien naturel, alors, que l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ sur le $\mathbb{R}^{3,1}$ des équations de cercles-droites et sur l'espace des matrices hermitiennes coïncident ! Cela permet de démontrer, et cela interprète naturellement l'isomorphisme évoqué dans l'appendice du rapport de la commission Kahane :

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{SO}_0(3, 1).$$

5° Version réelle de l'isomorphisme précédent

Fait : Parmi les homographies de la sphère, celles qui préservent l'axe réel (i.e. $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) sont exactement les éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Mais alors (on a abandonné la conjugaison, notez bien), on préserve également la demi-sphère supérieure, qui n'est autre que le demi-plan de Poincaré

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Mais, par holomorphie, il est clair que les homographies qui préservent le cercle $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ préservent également la famille des cercles orthogonaux à celui-ci. Ce sont exactement les géodésiques de $\mathcal{H}$, d'ailleurs. En termes d'équations, ce sont les cercles dont le centre appartient à $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, correspondant à (a, b, c, d) avec $c = 0$. En termes de matrices, ce sont les matrices symétriques réelles.

Du côté PSL_2 , on identifie $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ au stabilisateur de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$; du côté lorentzien, on identifie le stabilisateur de l'hyperplan $c = 0$ dans $\mathbb{R}^{3,1}$ avec $\mathrm{O}(2, 1)$. Au bilan, on obtient naturellement

un isomorphisme (au même sens que dans le paragraphe précédent : une réalisation naturelle d'un morphisme, qui permet de montrer que c'est un isomorphisme)

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{SO}_0(2, 1).$$

Pour résumer :

versant géométrie	versant formes quadratiques
cercles-droites sur la sphère	formes quadratiques hermitiennes
équation du cercle-droite	cône isotrope
géodésiques du demi-plan de Poincaré	matrices symétriques telles que [...]

Question au passage : le demi-plan de Poincaré est essentiellement formé des matrices symétriques définies positives. Pourquoi peut-on décrire une géodésique, i.e. une famille de cette chose, par une seule matrice symétrique (sans doute définie positive, d'ailleurs) ? Est-ce que c'est (l'intersection de) l'orthogonal au sens de Q (avec le cône défini positif) ? Pari.