Université Claude Bernard–Lyon I
Agrégation de Mathématiques : Algèbre & géométrie
Année 2006–2007

Coniques

A ne pas rater

- Différentes notions de coniques et classifications afférentes :
  - coniques projectives à homographie près (sur $\mathbb{R}$, classification par la signature des formes quadratiques) ;
  - coniques affines
    - à transformation affine près (sur $\mathbb{R}$: classification par le genre, qu'on reconnaît par la topologie ou par l'intersection avec la droite à l'infini) ;
    - à isométrie ou à similitude près (sur $\mathbb{R}$, classification par l'excentricité).
- Une conique projective d'image non vide "est" une droite projective. Application à la définition du birapport de quatre points sur une conique. Théorème de Pascal.
- Polarité : définition abstraite dans la conique (projective) duale et interprétation géométrique. (Application facile : construction du centre d'une conique.)
- Propriétés métriques : équation réduite dans un repère orthonormé, groupe de symétrie, définition par foyer et directrice, définitions bifocales.
- Propriétés (métriques) des tangentes : la tangente est une médiatrice de l'angle $\widehat{FMF'}$; éventuellement : deuxième théorème de Poncelet, théorème de l'angle pivotant : voir Lehmann et Bkouche, *Initiation à la géométrie.*

Questions projectives

- Classification<u>s</u> des coniques ? A quoi près ? Résultats ?
- Est-ce que (l'équation d')une conique projective d'image non vide et non réduite à un point est déterminée par son image ? (Réponse : oui, disons si le corps est assez gros, car par cinq points trois à trois non alignés il passe exactement une conique. Traiter avant le cas où l'une des coniques est dégénérée. [Berger, 16.1.4])
- Toute conique projective propre a une équation de la forme $x^2 - yz$.
- Construction point par point à la règle de la conique passant par cinq points donnés ? de la tangente en un des cinq points ?

Questions affines et métriques

- Qu'est-ce que la projection d'une sphère en perspective cavalière (ou centrale) ?
- Quelle est l'équation d'une conique en coordonnées polaires ? (On est donc dans un cadre euclidien.)
- La polaire du centre d'une conique est la droite à l'infini. Comment tracer le centre d'une conique à la règle et au compas ?

Remarques tirées des rapports du jury récents
Remarques tirées de `http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/Oralalggeo.html`.

2005 Dans la leçon "Coniques", il faut savoir trouver le centre d'une ellipse, les asymptotes d'une hyperbole et quelques formules célèbres et élémentaires.

2003 Les jurys ont un préjugé favorable à l'égard des rares candidats qui présentent une leçon de géometrie. Il regrette toutefois le manque de précision dans les plans et les développements.

Un sujet aussi vaste que les coniques nécessite que l'on restreigne son propos. Il n'est pas possible de faire le tour de la question en trois pages.

2002 Toutefois, la leçon "Coniques" a été un peu plus souvent prise que les années précédentes et a donné lieu à plusieurs bonnes notes.

1989 Les leçons de géométrie doivent évidemment être illustrées de figures attestant d'une réelle "vision" des constructions effectuées. Pour autant, la rigueur des démonstrations ne doit pas être négligée, non plus qu'une réflexion sur la nature des résultats énoncés. On souhaiterait que les candidats aient une conception claire de ce que sont propriétés métriques, affines, projectives... notamment en termes des groupes de transformations associés à ces notions. Cette réflexion peut se faire à un niveau tout à fait élémentaire; en son absence, des études comme les classifications de coniques et de quadriques se réduiraient à une "botanique" superficielle. D'autre part, on ne peut réclamer de virtuosité ou d'érudition en géométrie de la part de candidats n'ayant, pour la majorité d'entre eux, que peu pratiqué cette discipline au cours de leurs études, mais, en revanche, on souhaite que les principes de base soient connus: pour donner un seul exemple, le fait qu'une conique est déterminée par cinq points est à la fois simple et important.

1986 Les leçons sur les coniques ou les quadriques dans l'espace affine euclidien ne se limitent pas à leur classification.

Les candidats doivent savoir faire le lien entre éléments orthogonaux par rapport à une forme quadratique et éléments conjugués par rapport à une conique ou une quadrique.

Les propriétés élémentaires des tangentes aux coniques doivent être connues des candidats

En guise d'introduction
Comme le souligne le jury, il n'est pas question d'être exhaustif. Cependant, il est indispensable de montrer des propriétés projectives, des propriétés affines *et* des propriétés euclidiennes.
La définition la plus efficace des coniques est probablement par son équation. En effet, on englobe uniformément les dégénérescences qu'il est poussif d'ajouter après : deux droites, une droite double, un cercle (dans une version euclidienne).
Plus précisément, une conique, c'est un polynôme à scalaire non nul près : homogène de degré 2 à 3 variables dans le cadre projectif, ou de degré ≤ 2 à 2 variables dans le cadre affine ou euclidien. Son image est le lieu des points où le polynôme s'annule.
La première chose à faire, alors, c'est de montrer la cohérence de la définition : un polynôme, ce n'est pas canonique, ça dépend du choix d'une repère (affine ou projectif, c'est selon), si bien qu'il faut vérifier que la notion reste la même si on change de repère (*cf.* [Audin]). La nécessité d'*introduire* un groupe de transformations –les changements de repères autorisés– s'impose ainsi d'elle-même. Mais le *choix* du groupe dépend du cadre que l'on veut étudier :

- groupe projectif $PGL_3(\mathbb{K})$ si on travaille avec des coniques projectives ;
- groupe affine $\mathbb{K}^2 \rtimes GL_2(\mathbb{K})$ si on travaille avec des coniques affines ;
- groupe des isométries $\mathbb{R}^2 \rtimes O_2(\mathbb{R})$ ou des similitudes $\mathbb{R}^2 \rtimes (O_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^*)$ si on s'intéresse aux coniques dans un plan euclidien.

Noter qu'un changement de repère peut s'interpréter de deux façons, également utiles :

- soit on considère que les points ne bougent pas, et que seul le repère bouge : l'image de la conique est fixée, on étudie ses différentes équations dans tous les repères possibles ;

- soit on considère que le repère ne bouge pas, et que les points bougent : le repère est fixée, on étudie les transformées de la conique par toutes les transformations autorisées.

Il semble utile de préciser (oralement, voire seulement pour soi-même) à quel “niveau” se situe la propriété/l'invariant dont on est en train de parler. Par exemple : le fait d'être une conique propre ou dégénérée, le théorème de Pascal sont des propriétés projectives (invariantes par le groupe projectif) ; le genre d'une conique réelle propre est un invariant affine, son excentricité est un invariant de similitude, la distance entre un foyer et la directrice est un invariant d'isométrie.

Dans la suite, on trouvera plusieurs (pistes de) développements –en gros, un par paragraphe.

I Coniques comme droites projectives et théorème de Pascal

Réf. : M. Audin, *Géométrie*, VII.4 ; P. Samuel, *Géométrie projective*, chapitre II, §E ; M. Berger, *Géométrie.*

1° Paramétrage rationnel d'une conique

Comme l'équation d'une conique est de degré 2, l'intersection d'une conique et d'une droite est formée de zéro ou deux points (au pire un point double). Cela donne un sens à l'application suivante.
Etant donné un point $m \in \mathcal{C}$, on note m^* l'ensemble des droites qui contiennent m. Pour $D \in m^*$, une droite contenant m, on note $j_m(D)$ le point tel que

$$D \cap \mathcal{C} = \{m, j_m(D)\}.$$

Il est clair que $j_m : m^* \to \mathcal{C}$ est une bijection. Bien sûr, j_m dépend du point m –même son ensemble de définition en dépend. On a cependant le résultat d'invariance suivant :

Lemme *Soit m et n deux points de $\mathcal{C}$. Alors l'application*

$$j_n \circ j_m^{-1} : m^* \longrightarrow n^*$$

est une homographie.

Qu'est-ce qu'une homographie dans ce contexte ? Eh bien, comme tout brave faisceau linéaire de droites, m^* et n^* sont des droites du plan projectif dual du plan de départ. Tout ceci est un peu abstrait... Dans *Géométrie projective*, Samuel utilise la pente d'une droite de m^* comme paramètre : c'est la coordonnée de l'intersection de la droite avec la droite à l'infini. On peut donner une variante moins intrinsèque, mais plus parlante.
Soit $m \in \mathcal{C}$ et Δ_m une droite ne contenant pas m. On définit une application $J_m : \Delta_m \to \mathcal{C}$ de la façon suivante : l'image d'un point $p \in \Delta_m$ est caractérisé par

$$mp \cap \mathcal{C} = \{m, J_m(p)\}.$$

Lemme (variante) *Etant donné deux points $m, n \in \mathcal{C}$ et deux droites Δ_m, Δ_n ne contenant pas respectivement m et n, l'application*

$$J_n \circ J_m^{-1} : \Delta_m \longrightarrow \Delta_n$$

est une homographie.
Par conséquent, si on fixe un repère projectif sur chaque droite, et si t' est la coordonnée dans Δ_n de l'image d'un point de Δ_m de coordonnée t, alors t' est l'image de t par une fonction homographique (indépendante de t !).

L'avantage de cette version, c'est qu'on n'a pas besoin de passer au dual. L'inconvénient, c'est que rien n'est canonique. En tout état de cause, on fait clairement apparaître la structure de droite projective de la conique : le choix d'un point de $\mathcal{C}$ et d'une droite (ne contenant pas ce point) permet de définir des coordonnées sur la conique, et les changements de coordonnées correspondant à des choix différents sont des homographies : c'est exactement ce dont on a besoin pour définir le birapport sur la conique !

2° Birapport de quatre points sur une conique

C'est la première application du lemme précédent, et c'est l'ingrédient-clé de la preuve du théorème de Pascal des références classiques : [Samuel], [Berger], [Audin].

Proposition *Soit $\mathcal{C}$ une conique propre et m un point de $\mathcal{C}$. Etant donné quatre points p_1, p_2, p_3, $p_4 \in \mathcal{C}$, le birapport des droites $[mp_1, mp_2, mp_3, mp_4]$ ne dépend pas de m.*

Proposition (variante) *Soit $\mathcal{C}$ une conique propre, m un point de $\mathcal{C}$ et Δ_m une droite ne contenant pas m. Etant donné quatre points p_1, p_2, p_3, $p_4 \in \mathcal{C}$, le birapport des points $[J_m(p_1), J_m(p_2), J_m(p_3), J_m(p_4)]$ ne dépend pas de m.*

Définition *Le birapport de quatre points p_1, p_2, p_3, p_4 d'une conique propre est le birapport $[mp_1, mp_2, mp_3, mp_4] = [J_m(p_1), J_m(p_2), J_m(p)_3, J_m(p)_4]$, où m est un point arbitraire de la conique.*

On notera que si on fixe une droite Δ ne contenant pas m, munie d'un repère projectif, et si t_i est la coordonnée de l'intersection $mp_i \cap \Delta$, on a : $[mp_1, mp_2, mp_3, mp_4] = [t_1, t_2, t_3, t_4]$, ce qui est très concret. C'est ce que Berger appelle une "bonne paramétrisation".

3° Aparté : coniques projectives sur un corps fini

Ce qui précède montre l'importance de l'existence d'au moins un point dans l'image d'une conique. Il est facile d'exhiber des coniques sans points sur des corps non algébriquement clos : sur $\mathbb{R}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; plus subtilement, sur $\mathbb{Q}$, $x^2 - 3y^2 - 3z^2 = 0$ (réduire modulo 4). En revanche :

Proposition *Toute conique projective sur un corps fini possède un point.*

En d'autres termes, toute équation $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ a une solution non nulle. C'est un cas particulier du théorème de Chevalley-Warning (Serre, *Cours d'arithmétique*, chapitre 1), dont on trouve une preuve simple sans [Samuel], chapitre III, §D.

4° Aparté : deux applications concrètes

Le paramétrage précédent exprime que les coniques sont des courbes algébriques particulièrement simples : elles sont unicursales. Voici deux applications de cet état de fait.
Réf. : D. Perrin, *Géométrie algébrique*, Introduction.

(a) Paramétrage du cercle et triplets pythagoriciens

Lorsque la conique est le cercle $\mathbf{U}$ d'équation $x^2+y^2 = 1$, il est commode de choisir $m = (-1, 0)$ et de prendre pour Δ l'axe des ordonnées. Soit $T_t = (0, t)$ et $T'_t = (1, 2t)$. L'intersection de la droite $(JT_t) = (JT'_t)$ et du cercle $\mathbf{U}$ est

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

(Utiliser le théorème de l'angle inscrit et exprimer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $t = \tan(\theta/2)$.). Noter que $t = y/(1-x)$, d'où le

Lemme *Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors $t \in \mathbb{Q}$ si et seulement si $\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \in \mathbb{Q}$.*

Voyons comment résoudre $x^2 + y^2 = z^2$ en entiers à partir du paramétrage précédent. Soit (x, y, z) une solution avec $z \neq 0$. Quitte à diviser par le pgcd, on peut supposer x, y, z premiers entre eux dans leur ensemble. Mais si p premier divise x et z, par exemple, alors il divise y^2, donc y : ainsi, x, y et z sont premiers entre eux deux à deux.
Bien sûr, x et y ne sont pas tous les deux pairs. Mais s'ils étaient tous les deux impairs, on aurait $z^2 \equiv 2$ [4], impossible. Donc, quitte à permuter, on peut supposer x impair et y pair.
Or, le point $(x/z, y/z)$ est un point du cercle, donc, pour $t \in \mathbb{Q}$ convenable, on a : $x/z = (1-t^2)/(1+t^2)$ et $y/z = 2t/(1+t^2)$. Ecrivons $t = u/v$, avec $u \wedge v = 1$. On obtient $x(v^2 + u^2) = z(v^2 - u^2)$, d'où, par le lemme de Gauss : $z = k(u^2 + v^2)$ pour k convenable. On en déduit aussitôt $x = k(v^2 - u^2)$ (en fait, compte tenu que x et z sont impairs, on a : $k = \pm 1$ pour assurer $x \wedge z = 1$), puis $y = k \times 2uv$. Fini.

(b) Extension : points rationnels sur une conique

Plus généralement, quand on a une conique (projective) à coefficients entiers ou rationnels et un point à coordonnées rationnelles sur celle-ci, les points rationnels sont en bijection avec $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Précisons.
Une fois un repère fixé, on appelle point rationnel tout point dont les coordonnées sont rationnelles. Dans un espace affine, ce n'est pas ambigu. Dans un espace projectif, dire qu'un point $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est rationnel, c'est dire qu'il existe $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}^{n+1}$ tel que $p = [x_0 : \dots : x_n]$.
Soit donc $\mathcal{C}$ une conique (projective) qui possède une équation à coefficients rationnels, et dont on connaît un point rationnel m. Fixons une droite Δ_m ne contenant pas m, et à coefficients rationnels. On se convainc sans peine que ses points rationnels sont en bijection avec $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Pour un point rationnel $p \in \Delta_m$, les coordonnées de $J_m(p)$, défini comme le deuxième point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite mp, est rationnel.
En effet, quitte à changer la droite à l'infini, on peut supposer que m, p et $J_m(p)$ ne sont pas à l'infini. En d'autres termes, on se se place dans un plan affine bien choisi. Quitte à faire un changement de repère affine, on peut supposer que Δ_m n'est pas une droite verticale. On obtient alors l'abscisse de p comme la deuxième solution de l'équation aux abscisses, obtenue en éliminant l'ordonnée entre les équations de Δ_m et $\mathcal{C}$. Cette équation est de degré 2, à coefficients rationnels, et la première solution est l'abscisse de m. Les relations entre coefficients et racines d'un polynôme assurent donc que l'abscisse de p est rationnelle, et c'est fini. La bijection inverse, des points rationnels de $\mathcal{C}$ vers ceux de Δ_m, est du même genre, plus simple.

Remarque : On sait donc facilement déterminer les points rationnels d'une conique, dès qu'on en connaît un. Il est parfois difficile de déterminer, parmi ceux-là, les points *entiers*. La géométrie peut aider dès qu'on connaît *deux* points entiers, mais trouver un deuxième point n'est pas toujours facile : par exemple, la méthode classique pour l'équation de Pell-Fermat recourt au développement en fraction continue des nombres quadratiques. Voir la leçon "Groupes en géométrie" pour un développement sur ce thème.

(c) Calcul de certaines primitives

Si g est une fraction rationnelle à deux variables, on veut calculer une primitive de la forme

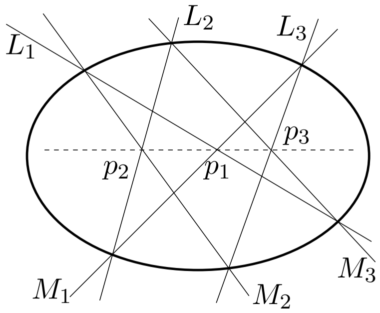
$$\int g(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,\mathrm{d}x.$$

C'est la conique $y^2 = ax^2 + bx + c$ qui est en jeu. Si on paramètre cette conique par le choix d'un point de la conique, d'une droite et d'une coordonnée t sur la droite, on exprime x et y comme des fraction rationnelles en t. On se ramène à intégrer des *fractions rationnelles*, ce qui, on le sait, est toujours possible.

5° Théorème de Pascal

(a) Enoncé

Théorème (Pascal) *Soit $\mathcal{C}$ une conique projective propre sur un corps quelconque. On fixe six droites $L_1, L_2, L_3, M_1, M_2, M_3$ telles que pour tout $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$, les droites L_i et M_j se coupent en un point de $\mathcal{C}$. Alors les trois points $p_i = L_i \cap M_i$ ($i = 1,2,3$) sont alignés.*

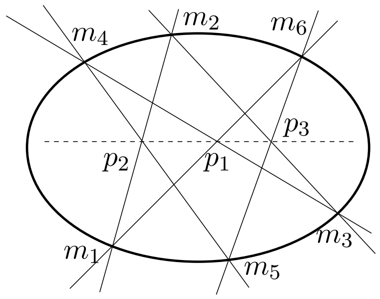


Démonstration classique : voir par exemple M. Audin, *Géométrie*. Insister plus qu'Olivier ne l'a fait sur l'idée qu'une conique est une droite projective.

(b) Une réciproque

Il est amusant de constater qu'à l'instar du théorème de Thalès, le théorème de Pascal "entraîne sa réciproque".

Proposition *Etant donné six points du plan m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 tels que les intersections des côtés opposés de l'hexagone, i.e. $m_1m_2 \cap m_4m_5$, $m_2m_3 \cap m_5m_6$ et $m_3m_4 \cap m_6m_1$, sont alignés, alors il existe une conique qui le contient tous.*



Notons $p_2 = m_1m_2 \cap m_4m_5$, $p_1 = m_3m_4 \cap m_6m_1$ et $p_3 = m_2m_3 \cap m_5m_6$. Si $\mathcal{C}$ est une conique qui contient $m_1, \ldots, m_5$, soit m_6' le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec m_5p_3 autre que m_5, et $p_1' = m_3m_4 \cap m_6'm_1$.
Par le théorème de Pascal appliqué à m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6', les points $p_1' \in p_2p_3$, donc $p_1' = p_1$. Ensuite, on a : $m_6 = m_1p_1 \cap m_5p_3 = m_6$, ce qui prouve que m_6 est sur $\mathcal{C}$.

C'est au fond cette réciproque qu'on utilise dans le tracé à la règle de la conique passant par cinq points donnés.

II Du projectif à l'affine et au métrique : droite à l'infini et points cycliques

En un mot : [Audin] VII.5. De cette partie du livre, on peut tirer deux développements utiles. On y donne une interprétation projective des propriétés affines et métriques d'une conique. C'est l'exposé dit de Plücker. Voir aussi [Berger] –surtout pour se convaincre que c'est plus clair dans [Audin].

1° Droite à l'infini

Qu'est-ce qu'un plan affine ? C'est un plan projectif auquel on a retiré une droite projective, qui devient *ipso facto* la droite à l'infini du plan affine. On détermine le genre d'une conique affine le nombre de points d'intersection d'icelle avec la droite à l'infini (figure 20 dans [Audin]).

2° Structure euclidienne

La remarque de base est :

Lemme *Considérons un plan projectif réel, muni de coordonnées projectives* $[x, y, z]$. *Les données suivantes sont équivalentes :*
(i) *une structure conforme, i.e. un produit scalaire euclidien dans le plan affine* $z \neq 0$, *à scalaire multiplicatif près ;*
(ii) *une paire de points conjugués non réels sur la droite à l'infini de ce plan, i.e. une paire* $\{[a, b, 0], [\overline{a}, \overline{b}, 0]\}$ *avec* $a, b \in \mathbb{C}^*$ *et* $a/b \notin \mathbb{R}$ *ou, ce qui revient au même,* $[1, \lambda, 0]$ *où* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Définition *Les points complexes à l'infini sont appelés les points cycliques de la structure conforme.*

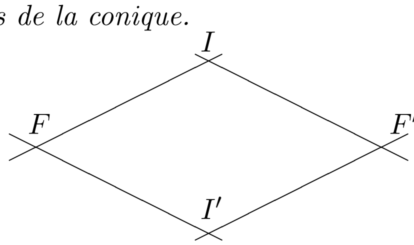
Démonstration. Notons $q(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ la norme euclidienne –elle ne dépend pas du choix d'une origine du plan affine. Dire qu'elle est définie (positive ou négative), c'est dire qu'elle n'a pas de droite isotrope dans $\mathbb{R}^2$. Mais il existe deux directions isotropes dans $\mathbb{C}^2$. Pour être explicite, on a nécessairement $\alpha\gamma \neq 0$ (pourquoi ?) et l'équation $\alpha + \beta y + \gamma y^2$ a deux solutions complexes conjuguées $\lambda, \overline{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On peut alors factoriser :

$$q(x, y) = \gamma(-\lambda x + y)(-\overline{\lambda} x + y),$$

donc les directions isotropes sont déterminés par les points à l'infini $[1, \lambda, 0]$ et $[1, \overline{\lambda}, 0]$.

L'intérêt de ces considérations, c'est que les foyers acquièrent une certaine naturalité :

Proposition *Les tangentes conjuguées à une conique propre menées depuis les points cycliques se coupent en les foyers de la conique.*



III Le cône nilpotent de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$

Réf. : R. Mneimné, *Eléménts de géométrie*, §0.C.9.

(a) On définit $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ comme le noyau de la trace dans les matrices 2×2 à coefficients réels :

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}.$$

C'est une algèbre de Lie, i.e. elle est stable par le crochet défini par : $[X, Y] = XY - YX$.

> **Aparté :** Rappelons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, antisymétrique et satisfaisant l'identité de Jacobi :
>
> $$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, \quad [X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$
>
> On a alors pour tout élément $X \in \mathfrak{g}$ une application linéaire $\operatorname{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $Y \mapsto [X, Y]$. Ca permet de définir une forme bilinéaire naturelle :
>
> $$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad \kappa(X, Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(X) \circ \operatorname{ad}(Y)).$$
>
> L'étude de cette forme quadratique, appelée forme de Killing, est au cœur de la théorie des algèbres de Lie. Par exemple, en caractéristique 0, elle est nulle si et seulement si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, non dégénérée si et seulement si $\mathfrak{g}$ est semi-simple.
>
> Or, il se trouve que si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, l'algèbre de Lie des matrices de trace nulle pour le commutateur, on a :
>
> $$\forall X, Y \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}), \quad \kappa(X, Y) = 2n \operatorname{tr}(XY).$$

On a donc sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ une forme quadratique naturelle, dont la forme polaire est $\kappa/2$:

$$\forall X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \quad q(X) = \mathrm{tr}(X^2) = -2\det(X).$$

Ainsi, *le cône isotrope de q est l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices nilpotentes.*
Plus généralement, $\{0\}$, le cône épointé $\mathcal{N} \setminus \{0\}$ et les hyperboloïdes $q^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$, sont les classes de conjugaison de matrices de trace nulle.

(b) Si on note $\perp$ l'orthogonalité par rapport à la forme quadratique q, on peut démontrer :

Proposition *Pour $X, Y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, on a :*
(i) $[X, Y] = 0$ *si, et seulement si X et X sont proportionnels ;*
(ii) *si $X \neq 0$, $\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}(X) = X^\perp$;*
(iii) *si $[X, Y] \neq 0$, $\mathbb{R}[X, Y] = X^\perp \cap Y^\perp$.*

(c) Soit alors $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ de déterminant < 0 (en particulier, X est diagonalisable) : il est à l'extérieur de $\mathcal{N}$, i.e. on peut mener deux plans tangents à $\mathcal{N}$, les droites d'intersection entre ces plans et $\mathcal{N}$ sont exactement les applications linéaires qui ont un espace propre de X pour image et l'autre pour noyau. Ainsi, une application linéaire de trace nulle et de déterminant négatif détermine naturellement deux directions *que l'on peut lire sur la conique* $\mathbb{P}(\mathcal{N}) \subset \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$.
Pour le démontrer, on peut choisir les coordonnées comme on veut, ce qui revient à supposer que X est diagonale.

(d) On peut par exemple en déduire simplement, avec des raisonnements liés à la conique :

Corollaire (i) *L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est simple.*
(ii) *Ses sous-algèbres de Lie maximales sont de dimension 2, et sont constituées de plans tangents au cône $\mathcal{N}$; elles sont toutes conjuguées à la sous-algèbre de Lie formée des matrices triangulaires supérieures.*

IV Deuxième théorème de Poncelet, billard elliptique

Réf. : [Berger], §17.6.3 ; [Lehmann–Bkouche] ? En particulier, voir les figures 17.6.3.3, pp. 192-193 de [Berger].

Théorème (cadre euclidien) *Etant donné un point M extérieur à une ellipse de foyers F et F', soit D et D' les deux tangentes à l'ellipse menées de M. Alors les couples de droites (MF, MF') et (D, D') ont les mêmes bissectrices.*

Rappelons la propriété incontournable des tangentes à une ellipse :

Lemme *Etant donné un point M sur une ellipse ayant pour foyers F et F', la tangente à l'ellipse en M est la bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$.*

Les deux propriétés mises ensemble donnent cette jolie intérprétation, en termes de billard. Une particule se déplace en ligne droite à l'intérieur d'une ellipse. Lorsque la trajectoire rencontre le bord, la suite se déroule sur le segment dirigé par la droite symétrique par rapport à la normale à l'ellipse.

Corollaire *Dans un billard elliptique, chaque segment d'une trajectoire est tangent à une ellipse de même foyers, qui ne dépend que de la trajectoire.*

En effet, prenons un point de départ M_0 de la particule sur le bord de l'ellipse $\mathcal{E}$, et soit M le premier point où la particule retouche le bord. Parmi les ellipses ayant les mêmes foyers que $\mathcal{E}$, il y en a exactement une, $\mathcal{E}'$, qui est tangente à $T = (M_0M)$ (voir la dernière remarque du paragraphe). Soit T' l'autre tangente à $\mathcal{E}'$ qui contient M, Δ et Δ' les bissectrices de (T, T'). D'après le théorème de Poncelet, Δ et Δ' sont aussi les bissectrices de (MF, MF'') ; d'après le lemme, ce sont la tangente et la normale à $\mathcal{E}$ en M. Donc la suite de la trajectoire va se dérouler sur T', qui est (par construction !) encore tangente à $\mathcal{E}'$.

Remarque *Etant donné une partie convexe d'intérieur non vide dont le bord est lisse, on peut y "jouer au billard" comme sur l'ellipse.*
L'intérêt du corollaire est que la question suivante, posée par Birkhoff en 1950, et toujours ouverte : étant donné un billard convexe, si, pour toute trajectoire, il existe une courbe tangente à chaque segment de la trajectoire, alors le billard est une ellipse.

Remarque *Les ellipses (resp. les hyperboles) ayant pour foyer les points de coordonnées* $(\pm 1, 0)$ *sont les images des cercles centrés à l'origine (resp. les droites contenant l'origine) par l'application holomorphe* $z \mapsto (z^2 + 1)/2z$. *Pas hyper-exaltant mais bon, ça permet de justifier l'existence et l'unicité évoquée ci-dessus, par exemple.*

V Coniques en coordonnées polaires

Il s'agit de coniques affines dans un plan euclidien orienté $\mathcal{P}$.

1° Définition d'une conique par foyer et directrice

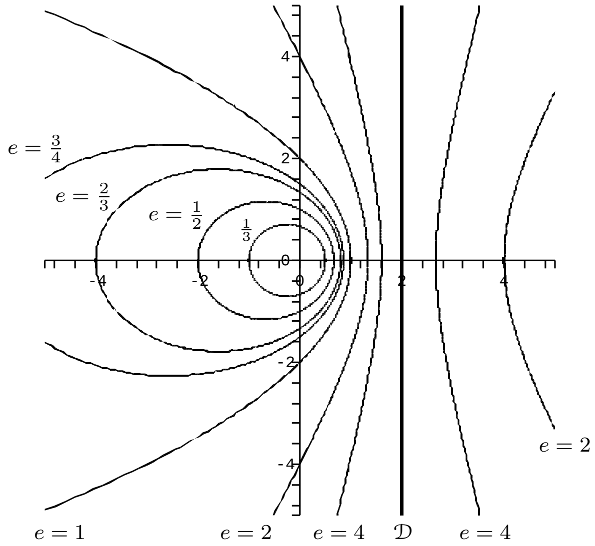
Dans $\mathcal{P}$, on fixe un point F, une droite $\mathcal{D}$ tels que $F \notin \mathcal{D}$, et un réel $e > 0$. On associe à ces données la conique

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P},\ MF = e\, d(M, \mathcal{D})\},$$

où $d(M, \mathcal{D})$ désigne la distance de M à la droite $\mathcal{D}$. Si H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, on a bien sûr : $d(M, \mathcal{D}) = MH$.

On appelle K le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$, on pose $i = \overrightarrow{FK}/FK$ et j le vecteur tel que (F, i, j) soit un repère orthonormé direct. Les coordonnées seront relatives à ce repère.

Voici, lorsque F et $\mathcal{D}$ sont fixés, l'allure des coniques lorsque e varie.



2° Coordonnées polaires

Il y a une ambiguïté quand on parle de coordonnées polaires.

(a) Le sens standard est le suivant. Soit M un point de $\mathcal{P}$, (x, y) ses coordonnées dans (F, i, j). Il existe un réel *positif* $\rho \geq 0$ unique et un réel θ, unique à 2π près si $M \neq F$, tels que l'on ait :

$$(*) \qquad \overrightarrow{FM} = \rho \cos\theta\, i + \rho \sin\theta\, j \quad \text{ou (c'est pareil)} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta. \end{cases}$$

Le couple (ρ, θ) forme, par définition, les coordonnées polaires de M dans le repère (F, i, j). Géométriquement, on trouve les coordonnées polaires de M ainsi : $\rho = FM$ et θ est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(i, \overrightarrow{FM})$.

(b) Cependant, on peut avoir intérêt à autoriser ρ à être négatif. Dans ces conditions, on peut appeler "quasi-coordonnées polaires"[1] de $M \neq F$ tout couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^* \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ tel que la relation $(*)$ ci-dessus soit satisfaite. Dans ces conditions, on perd l'unicité des coordonnées polaires. En effet, les points ayant pour quasi-coordonnées polaires (ρ, θ) et $(-\rho, \theta + \pi)$ coïncident :

$$\rho\cos\theta\, i + \rho\sin\theta\, j = (-\rho)\cos(\theta + \pi)\, i + (-\rho)\sin(\theta + \pi)\, j.$$

Géométriquement, θ change d'interprétation et ρ devient une mesure algébrique :

$$\theta = (\widehat{i, u_\rho}) \quad \text{et} \quad \rho = \langle \overrightarrow{FM}, u_\rho \rangle, \qquad \text{où } u_\rho = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j.$$

[1] Monier appelle un tel couple "système de coordonnées polaires de M".

(c) A présent, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle courbe d'équation polaire

$$\rho = f(\theta)$$

dans le repère (F, i, j), l'ensemble des points $M(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, où $M(\theta)$ est défini par :

$$\overrightarrow{FM(\theta)} = f(\theta) \cos\theta\, i + \sin\theta\, j.$$

On constate que si on impose à f d'être positive, $(f(\theta), \theta)$ sont les coordonnées polaires de $M(\theta)$ (en tout point tel que $f(\theta) \neq 0$), et qu'en général, $(f(\theta), \theta)$ sont seulement des quasi-coordonnées polaires de M.

3° Equation polaire des coniques

(a) On veut montrer que la conique $\mathcal{C}$ de 1° peut être décrite par l'équation polaire suivante[2] :

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \qquad \text{où } p = e.d(F, \mathcal{D}) = e\,FK.$$

Soit M un point, (x, y) ses coordonnées cartésiennes, (ρ, θ) des quasi-coordonnées polaires. On commence par calculer quelques coordonnées dans (F, i, j) :

$$F : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} : x = c, \quad M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad H : \begin{pmatrix} c \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{où } c = d(F, \mathcal{D}) = FK.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} \iff MF = e\,MH \iff & \sqrt{x^2 + y^2} = e|x - c| \\ \iff |\rho| = e|\rho\cos\theta - c| \iff & \begin{cases} (1 + e\cos\theta)\rho = ec \\ \text{ou} \\ (1 - e\cos\theta)\rho = -ec \end{cases} \end{aligned}$$

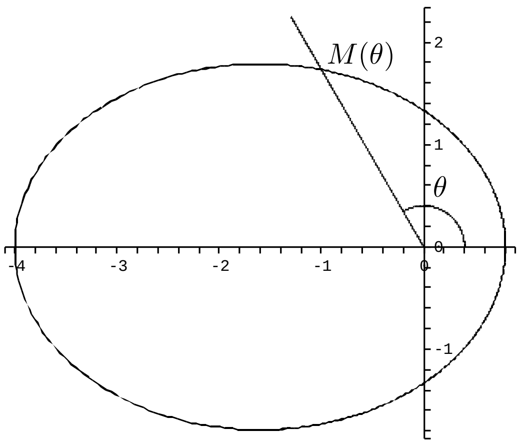
Or, compte tenu du fait que les points de quasi-coordonnées polaires (ρ, θ) et $(-\rho, \theta + \pi)$ coïncident, les courbes d'équations polaires

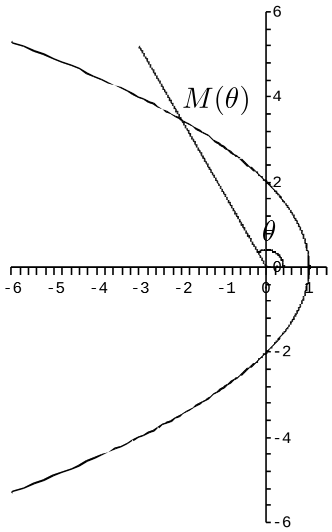
$$\rho = \frac{-ec}{1 - e\cos\theta} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{ec}{1 + e\cos\theta}$$

coïncident ! Si on pose $f(\theta) = ec/(1 + e\cos\theta)$ et $g(\theta) = -ec/(1 - e\cos\theta)$, le point de paramètre θ de la courbe $\rho = f(\theta)$ coïncide avec le point de paramètre $\theta + \pi$ de la courbe $\rho = g(\theta)$.
Par commodité, on ne garde que l'équation qui contient les signes +. On a obtenu l'équation polaire souhaitée.

(b) Pour $e \leq 1$, on a : $1 + e\cos\theta > 0$ (sauf si $e = 1$ et $\theta = \pi\ [2\pi]$), donc on est bien en coordonnées polaires classiques ($\rho > 0$). Toute demi-droite d'origine F coupe $\mathcal{C}$ en un point et un seul (sauf $F + \mathbb{R}^- i$ lorsque $e = 1$).

[2] Attention à ne pas faire vos ρ comme vos p !

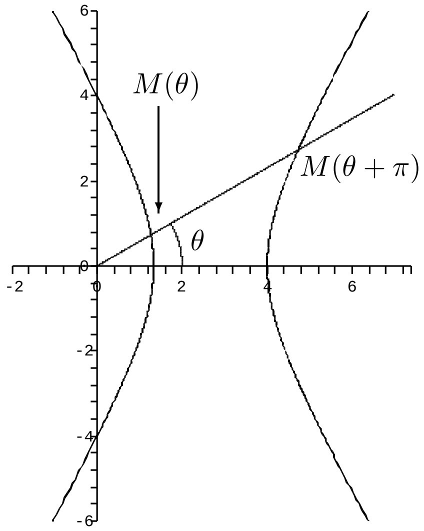




En revanche, pour $e > 1$, l'intérêt d'autoriser des $\rho < 0$ apparaît. En effet, parmi les demi-droites contenant F et dirigées par $u_\rho = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j$:

- certaines ne contiennent aucun point de $\mathcal{C}$;
- certaines en contiennent deux !

En revanche, chaque droite contenant F contient exactement deux points de $\mathcal{C}$ (à deux exceptions près, correspondant aux points où $1+e\cos\theta = 0$). L'intérêt de l'équation polaire proposée est de paramétrer la conique de façon uniforme par rapport à θ, au très faible prix de passer des "coordonnées polaires" aux "quasi-coordonnées polaires".



Ainsi, l'équation des coniques en polaires est complètement uniforme, alors que leur allure est assez variable.

4° Appendice/motivation : mouvement à force centrale

Réf. : un livre d'Arnold doit traiter ce sujet...

Dans ce numéro, on établit les lois de Kepler pour le mouvement des planètes, dans le modèle simplifié du problème à deux corps : une planète n'est soumise qu'à l'attraction du soleil immobile. En quelque sorte, on établit les préliminaires de l'exercice VII.37 de [Audin].

(a) Conservation du moment cinétique

Dans un espace affine euclidien orienté, on fixe un point F et on considère un point mobile $M = M(t)$ soumis à une force centrale, i.e. portée par $\overrightarrow{FM}$ et ne dépendant que de $\rho = FM$. Si on note $\dot{M}$ et $\ddot{M}$ les dérivées de M par rapport à t, la loi de Newton s'écrit donc, pour une fonction f convenable :

$$\ddot{M}(t) = f(\rho)\, u_\rho, \qquad \text{où} \quad u_\rho = \frac{\overrightarrow{FM}}{FM}.$$

Notons $\sigma = \rho u_\rho \wedge \dot{u}_\rho$ le moment cinétique. Par dérivation, on obtient :

$$\dot{\sigma} = 2\dot{\rho}\, u_\rho \wedge \dot{u}_\rho + \rho \dot{u}_\rho \wedge \dot{u}_\rho + \rho\, u_\rho \wedge \ddot{u}_\rho = 2\dot{\rho}\, u_\rho \wedge \dot{u}_\rho.$$

Par suite, $\dot{\sigma}$ est colinéaire à σ, si bien que la direction de σ est constante dans le temps. Il en résulte que u_ρ (et $\dot{u}_\rho$, mais au fond on s'en fiche) est toujours orthogonal à une direction fixe : en d'autres termes, le mouvement est plan.

Dans le plan où se déroule le mouvement, on fixe un repère orthonormé (F, i, j) et on utilise les coordonnées polaires (ρ, θ) pour repérer M : ce sont donc deux fonctions de t. On note $u_\rho = \frac{\overrightarrow{FM}}{FM}$ comme avant, de sorte que $\overrightarrow{FM} = \rho u_\rho$, et on note u_θ le vecteur tel que (u_ρ, u_θ) soit une base orthonormée de même orientation que (i, j). En coordonnées dans (i, j), on a donc :

$$u_\rho = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j, \qquad u_\theta = -\sin\theta\, i + \cos\theta\, j.$$

On en déduit aussitôt :

$$\dot{u}_\rho = \dot{\theta}\, u_\theta, \qquad \dot{u}_\theta = -\dot{\theta}\, u_\rho.$$

Par dérivations successives de $\overrightarrow{FM} = \rho\, u_\rho$, on trouve alors :

$$\dot{M} = \dot{\rho}\, u_\rho + \rho\dot{\theta}\, u_\theta,$$

$$\ddot{M} = \ddot{\rho}\, u_\rho - \rho\dot{\theta}^2\, u_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\, u_\theta + \rho\ddot{\theta}\, u_\theta.$$

Sachant que l'accélération $\ddot{M}$ est colinéaire à la force, i.e. à u_ρ, on en tire :

$$2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = 0, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\rho^2\dot{\theta} = C},$$

où C est une constante (multiplier par ρ et intégrer).
Bien sûr, si $\dot{\theta}$ s'annule à un instant donné, alors $C = 0$ et θ est constant : le mouvement se déroule sur une droite contenant F, ce n'est pas très intéressant. Si $C \neq 0$, on voit alors que θ est une fonction strictement monotone de t, et en contrepartie, on peut exprimer t en fonction de θ.

(b) Trajectoire dans le cas de la gravitation

Désormais, on suppose que la force subie par le point mobile est attractrice et proportionnelle à $1/\rho^2$. En d'autres termes, $f(\rho) = -K/\rho^2$. Pour décrire la trajectoire du point mobile, on veut écrire une équation différentielle liant ρ et θ : pour cela, on va éliminer t dans les équations

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -\frac{K}{\rho^2}, \quad \rho^2\dot{\theta} = C.$$

Cela a un sens d'après la fin du § précédent : on peut considérer t, donc aussi ρ, comme des fonctions de θ. Notons ρ' la dérivée de ρ par rapport à θ, qu'on prendra garde à ne pas confondre avec $\dot{\rho}$. En fait, on a (dérivation d'une fonction composée) :

$$\dot{\rho} = \dot{\theta}\, \rho' \qquad \text{–penser que} \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\, \frac{d\rho}{d\theta}.$$

En dérivant $\rho^2\dot\theta = C$, on trouve :
$$\ddot\theta = -2\frac{\dot\rho}{\rho}\,\dot\theta,$$
d'où :
$$\ddot\rho = \ddot\theta\rho' + \dot\theta^2\rho'' = \left(-2\frac{\rho'^2}{\rho} + \rho''\right)\dot\theta^2.$$
En reportant cette expression de $\ddot\rho$ dans l'équation du mouvement $\ddot\rho = -K/\rho^2$, il vient :
$$\left(\rho'' - 2\,\frac{\rho'^2}{\rho} - \rho\right)\dot\theta^2 = -\frac{K}{\rho^2}.$$
Malgré les apparences, cette équation est linéaire –en $u = 1/\rho$... On pose et on dérive :
$$u = \frac{1}{\rho}, \quad u' = -\frac{\rho'}{\rho^2}, \quad u'' = -\frac{\rho\,\rho'' - 2\rho'^2}{\rho^3}.$$
En notant que $\dot\theta = Cu^2$, il vient après simplification :
$$\boxed{u'' + u = \frac{K}{C^2}.}$$
La solution générale de l'équation sans le second membre peut s'écrire : $u = D\cos(\theta-\theta_0)$. Comme la constante K/C^2 est solution de l'équation avec le second membre, il existe $D, \theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que
$$\frac{1}{\rho} = \frac{K}{C^2} + D\cos(\theta-\theta_0).$$
Quitte à faire tourner le repère de θ_0 ou de $\theta_0+\pi$, on peut supposer que $\theta_0 = 0$ et que $D > 0$. On pose $e = DC^2/K$ et $p = C^2/K$, il vient finalement :
$$\boxed{\rho = \frac{p}{1+e\cos\theta}.}$$

(c) Anomalie excentrique

On renvoie au célèbre *PGCD* de F. Rouvière, Ex. 87 p. 254, pour un superbe développement un peu hors sujet sur les coniques (et encore !), mais qu'on peut placer dans un certain nombre de leçons d'analyse.

VI Théorème de Pascal : preuve de Plücker

Référence : Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, p. 20, fin du chapitre I.

1° Théorème de Pascal

Démonstration. Fixons un repère du plan, notons (x, y) les coordonnées d'un point. Pour $i = 1, 2, 3$, on désigne par ℓ_i (resp. m_i) l'équation de la droite L_i (resp. M_i) : c'est un polynôme de degré 1 en x et y, bien défini à une constante près. On introduit alors le polynôme suivant, dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$f_\lambda = \ell_1\ell_2\ell_3 + \lambda\, m_1m_2m_3.$$
Comme les ℓ_i et les m_i sont de degré 1, f_λ est de degré exactement 3 en (x, y). En effet, si le degré était < 3, cela voudrait dire que la partie homogène de degré 3 de $\ell_1\ell_2\ell_3$ et de $m_1m_2m_3$ sont proportionnelles : comme $\mathbb{R}[x, y]$ est factoriel, cela voudrait dire que la partie homogène de degré 1 de ℓ_i est proportionnelle à celle de m_j pour un certain j ; en d'autres termes, L_i serait parallèle à M_j, ce qui est contraire aux hypothèses.
On note $\mathcal{F}_\lambda$ la cubique formée des solutions de l'équation $f_\lambda(x, y) = 0$. De façon évidente, les six points d'intersection $L_i \cap M_j$ $(1 \le i \ne j \le 3)$ appartiennent à $\mathcal{F}_\lambda$, car pour un tel point, on a : $\ell_i(x, y) = m_j(x, y) = 0$.

On choisit alors un point $p \in \mathcal{C}$ distincts des six points p_i, i.e. n'appartenant à aucune des droites M_i $(i = 1, 2, 3)$: en un tel point, le polynôme $m_1m_2m_3$ ne s'annule donc pas, si bien qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f_\lambda(p) = 0$. Désormais, on garde cette valeur de λ.
Ainsi, l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}_\lambda$ contient au moins 7 points distincts. D'après la forme (très) faible du théorème de Bézout ci-dessous, c'est que c divise f_λ. Pour des raisons de degré, il existe ℓ, polynôme de degré 1 en (x, y), tel que

$$f_\lambda = c\ell.$$

Or, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, le point p_i appartient à $\mathcal{F}_\lambda$, mais pas à $\mathcal{C}$ (car l'intersection $L_i \cap \mathcal{C}$ contient au plus deux points, qui sont $L_i \cap M_j$ pour $j \neq i$). Par suite, on a pour tout i : $\ell(p_i) = 0$, ce qui exprime que les p_i sont alignés sur la droite d'équation $\ell = 0$.
On n'a donc plus qu'à énoncer et démontrer la forme (très) faible du théorème de Bézout.

Remarque *Noter aussi que si $\mathcal{C}$ est la réunion de deux droites, cette preuve marche encore (au contraire de celle de [Audin] ou [Samuel] : le théorème est alors le théorème de Pappus.*

2° Théorème de Bézout, forme (très) faible

Proposition *Soit $\mathcal{C}$ une conique propre (d'image non vide) et $\mathcal{F}$ une cubique propre, ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^2$ d'un polynôme de degré 3. Alors, soit $\mathcal{C}$ est contenue dans $\mathcal{F}$, soit $\mathcal{C} \cap \mathcal{F}$ contient au plus 6 points distincts.*

Remarque $6 = 2 \times 3$ *est le produit des degrés des polynômes qui définissent les courbes.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{C}$ n'est pas contenue dans $\mathcal{F}$. Puisque la conique $\mathcal{C}$ est propre, on peut choisir un repère dans lequel son équation est

$$y^2 = f(x),$$

où $f \in \mathbb{R}[x]$ est un polynôme de degré au plus 2. Dans ce repère, $\mathcal{F}$ a une équation de la forme

$$e(x, y) = 0,$$

où $e \in \mathbb{R}[x, y]$ est un polynôme de degré 3 en (x, y). En remplaçant y^2 par $f(x)$ dans e, on constate que l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{F}$ s'identifie à l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{F}'$, où $\mathcal{F}'$ est la courbe d'équation

$$g(x)y + h(x) = 0,$$

où $g, h \in \mathbb{R}[x]$ sont des polynômes de degrés : $\deg g \leq 2$, $\deg h \leq 3$.
On doit donc montrer qu'il y a au plus six solutions au système d'inconnues (x, y)

$$(*) \quad \begin{cases} y^2 = f(x) \\ g(x)y + h(x) = 0 \end{cases} \quad \text{où } \deg f \leq 2,\ \deg g \leq 2,\ \deg h \leq 3.$$

Idée *On distingue deux types de solutions (x_0, y_0) de $(*)$:*

- *Cas $g(x_0) = 0$. On a alors : $h(x_0) = 0$. Cela signifie que $x - x_0$ divise g et h, en d'autres termes, $\mathcal{F}$ contient la droite d'équation $x = x_0$, et alors l'intersection de cette droite avec $\mathcal{C}$ contient au plus 2 points.*

- *Cas $g(x_0) \neq 0$. Alors $y_0 = -h(x_0)/g(x_0)$ est bien déterminé par x_0 et, en reportant, $h(x_0)^2 = f(x_0)\, g(x_0)^2$, ce qui traduit que x_0 est racine d'un polynôme de petit degré (≤ 6 a priori, mais en fait moins dans la rédaction véritable).*

Soit k le nombre de solutions communes des polynômes g et h. Comme g est de degré au plus 2, on a : $0 \leq k \leq 2$. On note $(x_i)_{i=1,\dots,k}$ ces solutions, en les répétant selon leur multiplicité. On factorise g et h :

$$g(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)\,\tilde{g}(x), \quad h(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)\,\tilde{g}(x),$$

où $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ sont deux polynômes premiers entre eux, de degrés maximaux respectifs $2-k$ et $3-k$. Comme l'équation $y^2 = f(x)$ est de degré 2 en y, le système $(*)$ possède au plus $2k$ solutions (x, y) dont l'abscisse x est l'un des x_i.
Les solutions de $(*)$ dont l'abscisse x n'est pas l'un des x_i sont aussi solutions de

$$(\tilde{*}) \quad \begin{cases} y^2 = f(x) \\ \tilde{g}(x)y + \tilde{h}(x) = 0 \end{cases} \quad \text{et } \tilde{g}(x) \neq 0.$$

(En effet, on a éliminé toutes les racines communes à g et h.) Une telle solution est donc une racine de l'équation

$$(**) \quad \tilde{h}(x)^2 = \tilde{g}(x)^2\,f(x),$$

équation polynômiale de degré

$$d \leq \max(2\deg\tilde{h}, 2\deg\tilde{g} + \tilde{f}) \leq \max(2(3-k), 2(2-k)+2) = 6 - 2k.$$

Supposons que le polynôme $\tilde{h}^2 - \tilde{g}^2 f$ soit nul. On se convainc avec quelques manipulations que ce n'est pas possible. Comment ça, j'escroque ?
Ainsi, le polynôme $\tilde{h}^2 - \tilde{g}^2 f$ n'est pas nul, et l'équation $(**)$ a au plus $6 - 2k$ racines, ce qui produit au plus $6 - 2k$ solutions du système $(*)$ dont l'abscisse n'annule pas g. Au bilan, on aura donc au plus 6 solutions de $(*)$.