Université Claude Bernard–Lyon I
Agrégation de Mathématiques : Algèbre & géométrie
Année 2004–2005

Dimension et rang

Commentaire général
Précautions d'usage : ces notes ne sont certainement pas la meilleure leçon possible, loin de là. Le plan de J. Contessa me paraît très bien, pour autant qu'on y ajoute

- **l'algorithme de Gauss**, sous une forme ou sous une autre : preuve du théorème du rang et/ou calcul du rang d'une matrice ;
- au moins une méthode de calcul du rang, par exemple par l'algorithme de Gauss (oui, c'est un peu la même chose que ci-dessus, mais c'est si important !) ;
- une discussion "abstraite" de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Complément au développement proposé
Le développement proposé par J. Contessa était :

Proposition *Soit* $\Phi : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ *une application linéaire telle que* $\varphi(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*. Alors* Φ *préserve le rang.*

On trouvera dans la première épreuve du concours d'entrée à l'école Polytechnique 1988 (éditions Dunod, collection "J'intègre", disponible à la bibliothèque et à faire glisser dans la malle) une preuve du résultat suivant, qui constitue un heureux complément :

Proposition *Soit* $\Phi : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ *une application linéaire qui préserve le rang. Alors il existe* P *et* Q *inversibles telles que*

$$\forall X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \quad \Phi(X) = PXQ \quad \textit{ou} \quad \forall X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \quad \Phi(X) = P\,{}^tXQ.$$

Au bilan, on constate que les seuls endomporphismes linéaires de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ qui préservent l'inversibilité (ou le rang) sont les applications "évidentes". Ce fait est assez classique pour avoir fait l'objet d'un problème de concours, mais pas assez pour figurer dans les sources agrégatives usuelles : sans doute rentable.

Autres ajouts

- deux autres preuves du "théorème de la dimension" ;
- inégalités de Frobenius : $\mathrm{rg}(AB) + \mathrm{rg}(BC) \leq \mathrm{rg}(B) + \mathrm{rg}(ABC)$;
- rang d'une matrice et de ses sous-matrices ;
- rang (et signature) d'une forme quadratique (réelle), qui peut constituer un heureux développement possible.

***

On fixe un corps K. On note $\mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ l'espace des matrices $m \times n$ à coefficients dans K.
On désigne par $E, F, \ldots$ des espaces vectoriels et par $\varphi, \theta, \ldots$ des applications linéaires.
On ne considèrera que des espaces de type fini, i.e. des espaces qui sont engendrés par un nombre fini de vecteurs.

I Dimension d'un espace vectoriel

0° Préliminaires

Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base.
Truismes : toute famille libre maximale/génératrice minimale est une base.

1° Théorème de la base incomplète

Théorème *Soit $\mathcal{L}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice. On suppose $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.*

Idée de la démonstration : prendre un élément maximal pour l'inclusion dans l'ensemble des famille libres $\mathcal{F}$ telles que $\mathcal{L} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Corollaire *Tout espace vectoriel possède une base.*

2° Dimension

(a) Définition de la dimension

Théorème *Toutes les bases d'un espace vectoriel de type fini ont le même cardinal.*

Définition *La dimension d'un espace vectoriel (de type fini) est le cardinal de n'importe laquelle de ses bases. Notation : la dimension d'un espace E est notée* $\dim E$.

Une preuve du théorème : Il suffit de montrer que si $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, \ldots, e'_{n'})$ sont deux bases, elles ont le même cardinal. On peut supposer $n' \leq n$; en revanche, n' peut être infini si ça lui chante. Clé : le "lemme d'échange" suivant (qui prouve le théorème en prenant $k = n$) :

Lemme *Quitte à renuméroter, pour $k = 1, \ldots, n$, $(e_1, \ldots, e_{n-k}, e'_{n-k+1}, \ldots, e'_n)$ est une base.*

Remarque : corollaire de la preuve du théorème : on a en fait montré un peu plus :

Corollaire *Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice formée de n vecteurs ($n \in \mathbb{N}$). Alors toute famille contenant $n+1$ vecteurs est liée.*

Une deuxième preuve du théorème : Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ deux bases de E. Par hypothèse, pour tout $j = 1, \ldots, n$ et tout $i = 1, \ldots, m$, il existe des scalaires (uniquement déterminés) $(a_{jk})_{k=1,\ldots,m}$ et $(b_{ji})_{j=1,\ldots,n}$ tels que

$$\forall j = 1, \ldots, n, \quad f_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} e_k \qquad \text{et} \qquad \forall i = 1, \ldots, m, \quad e_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} f_j.$$

Supposons $m \neq n$, par exemple $m > n$. En substituant une expression dans l'autre, on voit que

$$\forall i = 1, \ldots, m, \quad e_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_{ij} a_{jk} e_k.$$

En d'autres termes, le produit BA est l'identité, où B et A sont les matrices carrées suivantes (il y a $m - n$ colonnes nulles dans B et $m - n$ lignes nulles dans A) :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nm} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci n'est guère raisonnable : en effet, le déterminant est multiplicatif, on devrait donc avoir :

$$\det B \det A = \det BA = 1,$$

alors que les déterminants de B et A sont évidemment nuls. D'où $m = n$.
Vous allez objecter que le déterminant n'arrive que beaucoup plus tard dans la théorie et tutti quanti. Je balaye cette objection d'un revers de main,

- en prenant pour définition de déterminant d'une matrice carrée $(b_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$:

$$\det B = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{m} b_{i,\sigma(i)};$$

- en constatant sa multiplicativité, ce qui est très facile (vérifiez !) ;
- en constatant que le déterminant de l'identité est 1, et que le déterminant s'annule s'il y a une rangée nulle, ce qui est évident.

Intérêt de cette preuve : elle fonctionne sans modification pour un module libre sur un anneau quelconque.

(b) Premières applications

Dimension du produit direct de deux espaces, dimension de la somme et de l'intersection, dimension du quotient par un sous-espace.
Critère d'égalité pour un sous-espace : le lemme suivant est à présent trivial mais utile :

Lemme *Si F est un sous-espace de E, alors* $\dim F \leq \dim E$. *En cas d'égalité, on a $F = E$.*

3° Isomorphisme "coordonnées" et classification des espaces vectoriels

(a) Etant donné un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ l'application linéaire suivante est un isomorphisme :

$$\begin{array}{rccc} c_{\mathcal{B}} : & K^n & \longrightarrow & E \\ & (x_i)_{i=1,\dots,n} & \longmapsto & \sum_{i=1}^n x_i e_i. \end{array}$$

Par conséquent, tous les espaces vectoriels de dimension donnée sur un corps donné sont isomorphes.

(b) Inversement :

Lemme *Un isomorphisme d'espaces vectoriels envoie une base sur une base. En particulier, les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension.*

(c) Ainsi, "les espaces vectoriels de type fini sur un corps donné sont classés à isomorphisme près par un invariant, la dimension."

4° Dualité

Voir le paragraphe correspondant de Julien Contessa.

5° Applications

(a) On sait que tout corps est un espace vectoriel sur son sous-corps premier (le corps engendré par 0 et 1). En particulier, un corps fini est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour p sa caractéristique. D'après 3°, notre corps est, en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$, isomorphe à $\mathbb{F}^d$ où d est sa dimension. Donc le cardinal d'un corps fini est toujours une puissance de sa caractéristique.
Il se trouve, mais c'est plus difficile, que les corps finis sont classés à isomorphisme près par un invariant, leur cardinal.

(b) Etant donnés deux corps $K \subset L$, on note $[L:K]$ la dimension de L vu comme espace vectoriel sur K. Etant donné trois corps $K \subset L \subset M$, on montre que

$$[M:K] = [M:L]\,[L:K].$$

En effet, si (e_i) est une base de L sur K et (f_j) est une base de M sur L, alors $(e_i f_j)$ est une base de M sur K. On l'a démontré sous l'hypothèse $[M:L]$ et $[L:K]$ finis, mais c'est en fait vrai (avec les conventions évidentes) en toute généralité.
Application : sachant que π et e sont transcendants, alors $\pi\, e$ ou $\pi + e$ est transcendant. On ne sait pas lequel, même s'il semble raisonnable de penser que c'est le cas des deux.

(c) Suites linéaires récurrentes

Ici, on suppose K algébriquement clos. On se donne $a_0, \ldots, a_{n-1}$ dans K et on considère l'espace vectoriel

$$E = \left\{ (u_k)_{k\in\mathbb{N}} : \ \forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_{n+k} \right\}.$$

L'application de restriction aux premiers termes $E \to \mathbb{K}^n$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (u_k)_{k=0,\ldots,n-1}$ est linéaire et, par récurrence, c'est une bijection. On appellera base standard de E l'image réciproque de la base standard de K^n. En particulier : $\dim(E) = n$.
On veut exhiber une base de E. Pour cela, on écrit et on factorise le polynôme

$$P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i},$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les racines (supposées distinctes) de P et $m_1, \ldots, m_r$ sont leurs multiplicités. Il est facile de voir que pour $i = 1, \ldots, r$ et $m = 0, \ldots, m_i - 1$, la suite $(k^m \lambda_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à E. Qui plus est, ces suites sont linéairement indépendantes. Par exemple, si P a des racines simples, la matrice dont les colonnes sont les colonnes de coordonnées de $(\lambda_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans la base standard de E est une matrice de Vandermonde.
En général, les suites $(k^m \lambda_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ($i = 1, \ldots, r$ et $m = 0, \ldots, m_i - 1$) forment une base de E.

(d) Récurrence sur la dimension

L'existence d'une dimension permet de démontrer certaines propriétés par récurrence. Par exemple :

- Des endomorphismes diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables (quel que soit le nombre d'endomorphismes).
- Une matrice symétrique réelle est diagonalisable et a une base orthonormée de vecteurs propres (pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$).

II Rang

1° Trois notions de rang ?

(a) Rang d'une famille de vecteurs

C'est par définition la dimension de l'espace vectoriel qu'elle engendre, i.e. la dimension de l'espace des combinaisons linéaires de cette famille.

Exemple *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base, $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ une famille. On dit que $\mathcal{F}$ est échelonnée par rapport à $\mathcal{B}$ s'il existe des entiers $i_1 < \cdots < i_p$ tels que l'on puisse écrire*

$$f_k = \alpha_k + \sum_{\ell<k} a_{i_\ell} e_{i_\ell}, \quad a_{i_k} \neq 0,$$

Alors le rang d'une famille échelonnée est son cardinal.

(b) Rang d'une application linéaire

C'est par définition la dimension de son image. Si φ est linéaire, on note : $\operatorname{rg}\varphi = \dim \operatorname{Im}\varphi$.

Exemple *Le rang d'un projecteur égale sa trace.*

Exemple *Si on peut composer deux applications linéaires, alors le rang de la composée est au plus le maximum des deux rangs.*

Liens entre les deux notions de rang : si l'espace de départ d'une application linéaire φ est engendré par une famille $(e_1, \ldots, e_n)$, alors $\operatorname{Im}\varphi$ est engendré par la famille $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$. Donc le rang de φ est le rang de la famille $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$.
Inversement, le rang de la famille $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ est le rang de l'application "combinaisons linéaires"

$$c_{\mathcal{F}} : \begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & E \\ (x_i)_{i=1,\ldots,n} & \longmapsto & \sum_{i=1}^n x_i f_i. \end{array}$$

(c) Rang d'une matrice (1)

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n}$ une matrice $m \times n$ à coefficients dans K. Les colonnes de A sont les matrices $C_j = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m}$ $(j = 1, \ldots, n)$, de taille $m \times 1$, qu'on identifie à des vecteurs de K^m. Par définition, le rang de A est la dimension du sous-espace de K^m engendré par les colonnes de A.
Lien avec les notions précédentes de rang : il est classique d'associer à A l'application linéaire

$$\varphi_A : \begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & K^m \\ X & \longmapsto & AX. \end{array}$$

C'est naturel, dans la mesure où A est la matrice de φ_A dans les bases canoniques/standards. Or, on constate que si $X = (x_j)_{j=1,\ldots,n} \in K^n$, alors AX est la combinaison linéaire $\sum_{j=1}^n x_j C_j$. Par conséquent, le rang de A est aussi le rang de l'application linéaire φ_A.

Proposition *Etant donné une matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ et deux matrices $P \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$, $Q \in \mathrm{Mat}_{m,m}(K)$ inversibles, les rangs de A et $Q^{-1}AP$ sont égaux.*

Idée de la preuve : interpréter A et $Q^{-1}AP$ comme la matrice de la même application linéaire dans deux bases différentes, P et Q étant les matrices de passage.

2° Théorème du rang

(a) Version abstraite

Théorème *Une application linéaire induit une bijection d'un supplémentaire du noyau sur l'image. En dimension finie, si $\varphi : E \to F$ est linéaire, il vient :*

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{rg}\varphi.$$

Il est équivalent de dire que φ induit un isomorphisme de $E/\operatorname{Ker}\varphi$ sur $\operatorname{Im}\varphi$.

(b) Version matricielle : algorithme de Gauss

Théorème *Etant donnée une matrice A de format $m \times n$ à coefficients dans K, il existe deux matrices P et Q inversibles, de formats respectifs $n \times n$ et $m \times m$ telles que*

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où r est le rang de A, I_r est l'identité de format $r \times r$, les zéros désignent des matrices nulles du bon format.

Première preuve (abstraite) : interpréter A comme la matrice d'une application linéaire $\varphi_A : K^n \to K^m$, choisir des bases adaptées à A et utiliser la formule de changement de base.
Deuxième preuve (constructive) : opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, selon l'algorithme de Gauss.

(c) Classification des applications linéaires/matrices à équivalence près
<u>Version matricielle</u> : Etant donné un format $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le rang classifie les matrices à équivalence près : deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
<u>Version abstraite</u> : Etant donné $\varphi : E \to F$ et $\varphi' : E' \to F'$, il existe des isomorphismes $\theta_e : E \to E'$ et $\theta_f : F \to F'$ tels que

$$\theta_f \circ \varphi = \varphi' \circ \theta_e : \qquad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ \downarrow\theta_e & & \downarrow\theta_f \\ E' & \xrightarrow{\varphi'} & F' \end{array}$$

si et seulement si $(\dim E, \dim F, \operatorname{rg}\varphi) = (\dim E', \dim F', \operatorname{rg}\varphi')$.
(d) Rang d'une matrice (2)

Lemme *Le rang d'une matrice et le rang de sa transposée sont égaux.*
Autrement dit, le rang d'une matrice de $\mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ *est le rang du sous-espace de* $\mathrm{Mat}_{1,n}(K) \simeq K^n$ *engendré par les lignes de* A.

Idée de la preuve : on applique la version matricielle du théorème du rang, ce qui ne change pas le rang ; sur une matrice aussi simple, calculer le rang est immédiat.

3° Algorithme de Gauss et calcul du rang

On s'intéresse au rang d'une matrice (tous les autres cas s'y ramènent). On peut utiliser l'algorithme de Gauss, via la preuve constructive du théorème du rang (version matricielle).

4° Quelques inégalités

On suppose que tous les produits/toutes les compositions écrites ont un sens :
(a) $\operatorname{rg}\varphi\psi + \operatorname{rg}\psi\theta \le \operatorname{rg}\psi + \operatorname{rg}\varphi\psi\theta$ ou $\operatorname{rg} AB + \operatorname{rg} BC \le \operatorname{rg} B + \operatorname{rg} ABC$.
Preuve : on se ramène à démontrer que $\dim\operatorname{Ker}\varphi\psi + \dim\operatorname{Ker}\psi\theta \le \dim\operatorname{Ker}\psi + \dim\operatorname{Ker}\varphi\psi\theta$.
Cela résulte de :

$$\dim\operatorname{Ker}\varphi\psi + \dim\operatorname{Ker}\psi\theta = \dim\operatorname{Ker}\psi + \dim(\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\psi) + \dim\operatorname{Ker}\theta + \dim(\operatorname{Ker}\psi \cap \operatorname{Im}\theta),$$

$$\dim\operatorname{Ker}\psi + \dim\operatorname{Ker}\varphi\psi\theta = \dim\operatorname{Ker}\psi + \dim\operatorname{Ker}\theta + \dim(\operatorname{Ker}\psi \cap \operatorname{Im}\theta) + \dim(\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\psi\theta),$$

et de la remarque que $\operatorname{Im}\psi\theta \subset \operatorname{Im}\psi$.
(b) $\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{rg}\psi - n \le \operatorname{rg}\varphi\psi \le \max(\operatorname{rg}\varphi, \operatorname{rg}\psi)$, où n est la dimension de l'espace d'arrivée de ψ et de départ de φ.
(c) Variante : $\dim\operatorname{Ker}\varphi\psi \le \dim\operatorname{Ker}\psi + \dim\operatorname{Ker}\varphi$.

5° Rang d'une matrice et de ses sous-matrices

Proposition *Le rang d'une matrice est la taille de sa plus grande sous-matrice inversible.*

Notations : $A = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$. Etant donné $I = \{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{1, \ldots, m\}$ et $J = \{j_1, \ldots, j_t\} \subset \{1, \ldots, n\}$, on a une matrice extraite $A_{IJ} = (a_{ij})_{i\in I, j\in J}$. On note $\Pi_I = (\delta_{i,j}\delta_{i\in I})_{i,j=1,\ldots,m} \in \mathrm{Mat}_{m,m}(K)$ (resp. $\Pi_J \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$) la matrice de la projection de K^m sur $\mathrm{Vect}(e_i : i \in I)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_{i'} : i' \notin I)$ (idem avec J). On note Π'_I (resp. Π''_J) la matrice $\mathrm{card}(I) \times m$ (resp. $n \times \mathrm{card}(J)$ obtenue en retirant les lignes nulles de Π_I (resp. les colonnes nulles de Π_J). Le coefficient d'indice (i,j) de $\Pi_I A \Pi_J$ est a_{ij} si $(i,j) \in I \times J$ et 0 sinon.
Comme les lignes nulles et les colonnes nulles ne contribuent pas au rang, on a :

$$A_{IJ} = \Pi'_I A \Pi''_J \quad \text{et} \quad \operatorname{rg} A_{IJ} = \operatorname{rg}(\Pi_I A \Pi_J).$$

Tout d'abord, pour tout I et tout J, on a : $\operatorname{rg} A_{IJ} \le \operatorname{rg} A$.

On munit K^n de sa base standard $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$. On choisit $J = \{j_1, \ldots, j_r\} \subset \{1, \ldots, n\}$ de sorte que $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r})$ engendrent un supplémentaire de $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \varphi_A$. Existence d'un tel J : extraire une base de la famille $(\pi(e_1), \ldots, \pi(e_n))$, où $\pi : K^n \to K^n / \operatorname{Ker} A$ est la projection canonique ; la relever dans K^n.
D'après le théorème du rang, les colonnes de A indexées par J engendrent $\operatorname{Im} A$, d'où : $\operatorname{Im} A\Pi_J = \operatorname{Im} A$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A\Pi_J$.
Happy end : D'après ce qu'on vient de montrer, il existe $I \subset \{1, \ldots, m\}$ tel que $\operatorname{rg} {}^t(A\Pi_J)\Pi_I = \operatorname{rg} {}^t(A\Pi_J) = \operatorname{rg} A$. Alors, $\operatorname{rg} \Pi_I A\Pi_J = \operatorname{rg} A$, ce qu'on voulait.
Unhappy end : On munit K^m de sa base standard $(f_i)_{i=1,\ldots,m}$. On choisit alors $I' = \{i'_1, \ldots, i'_{n-r}\} \subset \{1, \ldots, m\}$ (le même r, bien sûr) de sorte que $(f_{i'_1}, \ldots, f_{i'_{n-r}})$ engendre un supplémentaire de $\operatorname{Im} A$ dans K^m. (Existence : réduire modulo $\operatorname{Im} A$!) On note $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ le complémentaire de I. Alors la projection sur $\operatorname{Vect}(f_i : i \in I)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(f_{i'} : i' \in I')$ induit un isomorphisme de $\operatorname{Im} A$ sur $\operatorname{Vect}(f_i : i \in I)$. On se convainc que $\operatorname{rg} \Pi_I A\Pi_J = \operatorname{rg} A\Pi_J$.

6° Applications

(a) Discussion d'un système linéaire $AX = B$

Ici, $A \in \operatorname{Mat}_{m,n}(K)$, $X \in K^n$, $B \in K^m$. On introduit $\varphi_A : K^n \to K^m$, $X \mapsto AX$. Si $B \in \operatorname{Im} \varphi_A$, l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension $n - \operatorname{rg} A$; en particulier, si $\operatorname{rg} A = n$, c'est un singleton ; sinon, l'ensemble des solutions est vide.
Il est raisonnable de définir le rang du système comme le rang de A ou de φ_A.

(b) Projections sur les axes de coordonnées et sélection d'inconnues principales

(c) Exercice : on donne $A, B \in \operatorname{Mat}_{n,n}(K)$. Résoudre $X + \operatorname{tr}(X)A = B$.
Idée : on introduit $\varphi : \operatorname{Mat}_{n,n}(K) \to \operatorname{Mat}_{n,n}(K)$, $X \mapsto X + \operatorname{tr}(X)A$. Alors φ est bijectif SSI $1 + \operatorname{tr}(A) \neq 0$. Lorsque $1 + \operatorname{tr}(A) = 0$, on vérifie que $\dim \operatorname{Ker} \varphi \leq 1$, que $A \in \operatorname{Ker} \varphi$, que $\operatorname{Im} \varphi \subset \operatorname{Ker} \operatorname{tr}$. Alors le théorème du rang permet de conclure qu'on a égalité partout : $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Ker} \operatorname{tr}$, $\operatorname{Ker} \varphi = KA$ et une image réciproque de $B \in \operatorname{Ker} \operatorname{tr}$ est B.

III Rang et signature des formes quadratiques

1° Rang sur un corps quelconque

(a) On suppose que K n'est pas de caractéristique 2. Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie, $\langle ., . \rangle$ la forme bilinéaire associée.
On fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et on note B la matrice de Q dans cette base : le coefficient d'indice (i, j) est $b_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. En notant $X = (x_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a : $Q(v) = {}^tXBX$.
Si $(e'_i)_{i=1,\ldots,n}$ est une autre base, P la matrice de passage de $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ à $(e'_i)_{i=1,\ldots,n}$, de sorte que $X = PX'$ avec les notations évidentes, on a : ${}^tXBX = {}^tX'{}^tP'BPX'$, si bien que la matrice de Q dans la base (e'_i) est :

$$B' = {}^tPBP.$$

Lemme (i) *Le rang de B' est égal au rang de B.*
(ii) *Il existe P inversible telle que ${}^tPBP$ soit diagonale. Le nombre de coefficients non nuls de cette matrice ne dépend que de B et pas de P : c'est le rang de B.*

Définition *Le rang d'une forme quadratique comme le rang de sa matrice dans n'importe quelle base.*

Sketch : (i) ne demande pas de preuve supplémentaire. Pour (ii), on applique l'algorithme de Gauss pour les formes quadratiques.

2° Signature dans le cas réel

(a) Ici, $K = \mathbb{R}$. Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension n sur K, $\langle ., . \rangle$ la forme bilinéaire symétrique associée, B la matrice de Q dans une base quelconque.

Théorème (Sylvester) (i) *Soit $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Soit P tel que ${}^tPBP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alors le couple*

$$(r_+, r_-) \in \mathbb{N}^2, \quad r_\pm = \mathrm{card}\{i : \pm\lambda_i > 0\}$$

ne dépend que de B et pas de P.
(ii) *Inversement, deux formes quadratiques q*

Définition *La signature de la forme quadratique associée à B est le couple (r_+, r_-). Ou, selon les auteurs, le triplet $(n, r_+ + r_-, r_+)$.*

Remarque *Supposons savoir qu'une matrice symétrique est diagonalisable. Les entiers r_+ et r_- sont les nombres de valeurs propres strictement positives et négatives de B, comptées avec multiplicité.*

Idée de la preuve : (i) Il suffit de démontrer que

$$r_\pm = \max\{\dim F\},$$

le max étant pris sur l'ensemble des sous-espaces F de E sur lesquels $\pm\langle .,. \rangle|_F$ est définie positive. En effet, cette expression ne dépend pas du choix d'une base, mais uniquement de la forme $\langle .,. \rangle$.
Pour commencer, on exhibe un sous-espace de la bonne dimension. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthogonale pour $\langle .,. \rangle$, numérotée de sorte que $\langle e_i, e_i \rangle$ soit strictement positif si $i = 1, \ldots, r_+$, strictement négatif si $i = r_+ + 1, \ldots, r_+ + r_-$ et nul sinon. Alors, sur l'espace engendré par $e_1, \ldots, e_{r_+}$ (resp. $e_{r_++1}, \ldots, e_{r_++r_-}$), la forme $\langle .,. \rangle$ est définie positive. D'où : $r_\pm \leq \max\dim(F)$.
Inversement, supposons que F soit de dimension strictement plus grande que r_+ (resp. r_-), et considérons son intersection avec l'espace engendré par $e_{r_++1}, \ldots, e_n$ (respectivement par $e_1, \ldots, e_{r_+}, e_{r_++r_-+1}, \ldots, e_n$: ce sont les vecteurs dont la norme a "le mauvais signe") : pour des raisons de dimension, cette intersection contient au moins un vecteur non nul, dont la norme est négative ou nulle (resp. positive ou nulle). Ceci montre que $\max\dim(F) \leq r_\pm$.
(ii) Quitte à remplacer D par ${}^tQDQ$ où $Q = \mathrm{diag}(d_i)_{i=1,\ldots,n}$ où $d_i = |\lambda_i|^{-1/2})$ si $\lambda_i \neq 0$ et $d_i = 1$ si $\lambda_i = 0$, on peut supposer que les coefficients diagonaux sont tous 0, 1 ou -1. C'est fini.

(b) Variante hermitienne

Etant donné une matrice hermitienne $H = H^*$, il existe P inversible telle que P^*HP est diagonale, les coefficients étant nécessairement réels. On a le même résultat, avec la même preuve.

3° Une incursion chez les complexes

Petit lemme utile à l'occasion :

Lemme *Soit $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$. Alors : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*A)$, où A^* est la transconjuguée de A.*

Preuve : Il suffit de remarquer que $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}(A^*A)$. D'une part, $\mathrm{Ker}\, A \subset \mathrm{Ker}\, A^*A$ trivialement. D'autre part, si $A^*AX = 0$, alors $X^*A^*AX = 0$ donc $\langle AX, AX \rangle = 0$, soit $AX = 0$.