

Référence de base : annexe 1 du rapport de la commission de réflexion sur l’enseignement des mathématiques : ups.prepas.org/maths/kahane/geometrie.pdf.

I Géométries et groupes

1° Géométries

Comme on l’aura compris de la lecture du rapport précédent, on peut considérer différentes géométries, caractérisées par

- un ensemble X (les “points”),
- un groupe G opérant sur X (les “transformations admissibles”),
- et, souvent, une famille \mathcal{D} de parties de X préservée par G .

Dans ce point de vue, une géométrie, c’est l’étude des propriétés préservées par un groupe de transformations “admissibles”, qui laissent invariante une “structure” : alignement, distance, cocyclicité, etc. La famille de parties \mathcal{D} , c’est une famille de parties qui se définissent naturellement à l’aide de la structure en question.

Exemples :

1. Géométrie affine : X est un espace affine, G est le groupe affine, \mathcal{D} est l’ensemble des droites ou, plus généralement, des sous-espaces affines.
2. Géométrie euclidienne : X est un espace affine euclidien, G est le groupe des isométries affines de X , \mathcal{D} est l’ensemble des droites ou, plus généralement, des sous-espaces affines, ou alors, l’ensemble des sphères.
3. Géométrie projective : X est un espace projectif, G est le groupe projectif, \mathcal{D} est l’ensemble des sous-espaces projectifs.
4. Géométrie anallagmatique : $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est la sphère de Riemann, G est le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ des homographies ou le groupe modulaire $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \rtimes \langle \sigma \rangle$, engendré par les homographies et les inversions (où σ est la conjugaison complexe), \mathcal{D} est la famille des cercles-droites.
5. Géométrie hyperbolique (voir VI) : $X = \mathcal{H}$ est le demi-plan de Poincaré, $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ est le groupe des homographies réelles, \mathcal{D} est la famille des demi-cercles orthogonaux à l’axe réel (y compris les demi-droites orthogonales à l’axe réel).

2° Reconstruction

Dans ce qui précède, on a mis en évidence une “structure” sur un ensemble X (terme un peu vague), puis on a exhibé d’une part le groupe G des transformations qui la préservent, et d’autre part la famille privilégiée \mathcal{D} de parties que préserve G (l’image d’une partie de \mathcal{D} est encore dans \mathcal{D}).

Or, il arrive que la donnée de X et \mathcal{D} suffise (presque) à caractériser G .

Exemples (pouvant donner lieu à développement ?) :

1. “Théorème fondamental de la géométrie affine” : si \mathcal{E} et \mathcal{E}' sont deux espaces affines de même dimension ≥ 2 , et si $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ est une bijection qui préserve l’alignement, alors φ est affine. **Réf. :** [Audin], Exercice I.66 (les numéros dans les références à ce livre sont peut être un peu faux).

2. Théorème de Liouville (réinterprété) : si P est un plan affine euclidien, si $\varphi : P \rightarrow P$ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 qui préserve les angles, alors φ est une similitude. En effet, l'hypothèse exprime que la différentielle de φ en tout point préserve les angles, donc c'est une similitude, donc φ est holomorphe, donc entière et bijective du plan dans lui-même, et on peut en déduire que φ est affine. **Réf.** : [Audin], Remarque II.3.10 et Exercice III.69.
3. Toute application bijective de la sphère de Riemann dans elle-même qui préserve l'ensemble des cercles et des droites est dans le groupe modulaire. Ce dernier est le groupe engendré par les homographies et la conjugaison complexe : c'est le produit semi-direct $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. **Réf.** : [Audin], Théorème VI.7.12.

II Invariants

1° **Idée** : Si le groupe G agit n fois transitivement sur X , alors considérer les G -orbites de $(n+1)$ -uplets d'éléments de X permet de définir un invariant de G .

Exemples :

1. Angles en dimension 2 et ≥ 3 . Le groupe (spécial) orthogonal agit transitivement sur la sphère unité, mais pas deux fois transitivement. On s'intéresse aux orbites de couples de vecteurs unitaires, qu'on appelle angles.

La situation est plus intéressante en dimension 2, car l'action du groupe spécial orthogonal y est simplement transitive : par suite, les orbites des couples de vecteurs sont paramétrées, modulo le choix d'une origine sur le cercle, par un point du cercle. En dimension ≥ 3 , le groupe orthogonal est plus gros, donc les orbites sont elles-mêmes plus grosses, et il y en a moins : il y a beaucoup moins d'angles que de points de la sphère unité.

2. Birapport. Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ agit trois fois transitivement sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, mais pas quatre fois ; de plus, il y a exactement une homographie qui transporte trois points donnés sur trois points fixés à l'avance. Le birapport de quatre points, c'est l'image du quatrième point par l'homographie qui envoie les trois premiers sur $(\infty, 0, 1)$. En formule (démarche pas très conceptuelle !) : si $a, b, c \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ sont distincts, l'homographie qui envoie a sur ∞ , b sur 0 et c sur 1 est :

$$g : z \mapsto \frac{z - b}{z - a} \Big/ \frac{c - b}{c - a},$$

et le birapport $[a, b, c, d]$ vaut : $g(d)$.

3. Birapport de quatre droites dans un faisceau. On considère quatre droites d_1, d_2, d_3, d_4 dans un même faisceau (i.e., concourantes) et une droite d sécante aux quatre. Alors le birapport des points d'intersection $d_i \cap d$, calculé dans d , ne dépend que des d_i et pas de d . Voir [Audin], Ex. VI.16 et VI.17.

2° Relations entre invariants et théorèmes

Le rapport Kahane donne plusieurs exemples de théorèmes de géométrie standard qui découlent soit de l'existence d'un invariant, soit de l'existence d'une relation entre invariants. Exemple : l'alignement du centre de gravité, de l'orthocentre et du cercle circonscrit ne fait que traduire, dans un langage approprié, la relation suivante, où u et v sont des vecteurs d'un plan euclidien :

$$\langle u, v \rangle^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Autre exemple/développement : la formule des six birapports. Avec la définition du birapport, cela me paraît un superbe développement pour cette partie. On trouve la formule des six birapports et des applications dans [Audin], Ex. VI.40 ("Applications à la géométrie euclidienne"). Voir aussi le document sur le théorème de Miquel (pas publié).

III Régularisation de figures

Idée : On veut démontrer une propriété générale. Pour cela, on transforme la figure en une figure plus régulière, i.e. dont le groupe de symétries est plus gros que celui de la figure générique. Evidemment, ceci ne fonctionne que si la propriété à démontrer est préservée par la transformation initiale.

1° Envoi d'éléments à l'infini

Ceci fait l'objet d'une leçon spécifique (142).

2° Alternative de Steiner

Dans un plan affine euclidien, on considère deux cercles \mathcal{A} et \mathcal{B} , intérieurs l'un à l'autre. On choisit un cercle \mathcal{C}_1 tangent intérieurement à \mathcal{A} et extérieurement à \mathcal{B} . Il existe exactement deux cercles tangents à \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C}_1 : on en choisit un qu'on appelle \mathcal{C}_2 . On construit alors le cercle \mathcal{C}_3 tangent à \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C}_2 distinct de \mathcal{C}_1 , puis on itère la construction, ce qui définit une famille de cercles $(\mathcal{C}_n)_{n \geq 1}$.

Si on remplace le cercle \mathcal{C}_1 par un autre cercle \mathcal{C}'_1 tangent à \mathcal{A} et \mathcal{B} , on définit de même une famille de cercles $(\mathcal{C}'_n)_{n \geq 1}$. L'énoncé est le suivant :

- soit il existe $p \geq 2$ tel que $\mathcal{C}_p = \mathcal{C}_1$, et alors, pour tout cercle \mathcal{C}'_1 , on a : $\mathcal{C}'_p = \mathcal{C}'_1$;
- soit tous les \mathcal{C}_n sont distincts, et alors, pour tout cercle \mathcal{C}'_1 , tous les cercles \mathcal{C}'_n sont distincts.

Idée de preuve : On trouve une inversion qui transforme \mathcal{A} et \mathcal{B} en deux cercles concentriques (pourquoi ceci existe-t-il ?). Alors, les cercles \mathcal{C}_n sont tous de même rayon, et, pour $n \geq 0$, \mathcal{C}_{n+1} est l'image de \mathcal{C}_n par une rotation ρ , dont l'angle ne dépend que des rayons des cercles concentriques (calcul de cet angle ?). Le fait que la suite de cercles soit périodique ou non ne dépend que de cet angle, et pas de la position de \mathcal{C}_1 .

On peut aussi arguer que dans la situation "régularisée", il existe une rotation ρ' qui transforme \mathcal{C}_1 en \mathcal{C}'_1 , qui commute à ρ : par suite, $\mathcal{C}'_n = \rho^n(\mathcal{C}'_1) = \rho'(\mathcal{C}_n)$. D'où l'équivalence.

Réf. : [Audin], Exercice III.65 et fin du chapitre III. [Berger] ?

3° Ellipse de Steiner¹

(a) Énoncé : Soit $A_1A_2A_3$ un triangle non aplati dans un plan affine euclidien. Pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ (ou, si on veut, $\neq 0$), on considère les six barycentres

$$M_{\lambda, \sigma} = \text{Bar} \left((A_1, \lambda_{\sigma(1)}), (A_2, \lambda_{\sigma(2)}), (A_3, \lambda_{\sigma(3)}) \right) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_3).$$

Alors, il existe une ellipse \mathcal{E}_λ qui contient les six points $M_{\lambda, \sigma}$. De plus, toutes ces ellipses sont homothétiques.

Intérêt. Ce résultat est un peu étonnant puisque l'énoncé générique est : par cinq points génériques, il passe exactement une conique. Rappelons le pourquoi de cet énoncé : dans un repère fixé, une conique a une équation de la forme :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

soit six coefficients définis à une constante multiplicative près. Cinq points au hasard vont donc définir cinq équations génériquement indépendantes, soit une unique conique. Ici, on impose une sixième contrainte, et on fixe de plus le genre de la conique (i.e. le signe de $ac - b^2$).

Idée de preuve. Par une transformation affine convenable φ , on transforme le triangle $A_1A_2A_3$ en un triangle équilatéral $A'_1A'_2A'_3$. On sait que le groupe de symétries d'un triangle équilatéral est \mathfrak{S}_3 : pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, il existe une unique isométrie affine qui envoie A'_i sur $A'_{\sigma(i)}$ ($\sigma \in \mathfrak{S}_3$) ; cette isométrie fixe le centre O' du triangle. Mais ceci entraîne

¹Origine : J. Verliat *et al.*, promo 2005.

que les six points $M'_{\lambda,\sigma}$ sont sur le même cercle \mathcal{E}'_λ de centre O' . Par suite, les six points $M_{\lambda,\sigma}$ sont sur la même ellipse $\mathcal{E}_\lambda = \varphi^{-1}(\mathcal{E}'_\lambda)$.

(b) Variante de preuve (pas dans l'esprit). On peut ne pas choisir de produit scalaire au départ. En effet, l'énoncé est affine : un ellipse est une partie du plan qui, dans un repère quelconque, a une équation polynomiale de degré 2, non dégénérée, et qui est compacte. On fixe alors un produit scalaire qui rend le triangle initial équilatéral (comment ?), et on réalise les $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ comme des isométries du plan pour ce produit scalaire.

Lien entre les deux preuves. Le produit scalaire de la deuxième preuve est le produit scalaire "transporté" par l'application affine de la première.

(c) Compléments. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$, $\lambda_3 = 0$, l'ellipse correspondante est tangente aux côtés du triangle (évident). Pour $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, l'ellipse correspondante est l'ellipse d'aire minimale qui contient les trois sommets du triangle (moins évident ! voir à ce propos le théorème de John-Loewner dans [Alessandri]). On peut étendre cette construction à un tétraèdre.

Réf. : [Combes], p. 130 environ.

IV Définition de figures géométriques

1° Types de figures comme orbites

(a) Exemples

On caractérise nombre de figures usuelles comme une orbite d'une figure particulière sous un groupe. Exemples :

- les triangles non aplatis sont dans la même orbite sous le groupe affine ; on exploite d'ailleurs cette propriété dans III 3° ;
- les coniques propres d'un plan projectif réel ou complexe sont toutes dans la même orbite du groupe projectif opérant sur les parties du plan ;
- les coniques non dégénérées d'un plan affine réel forment trois orbites de parties du plan : ellipses, paraboles, hyperboles.

(b) Un intérêt de la chose : placer les théorèmes dans leur bonne généralité.

Par exemple, le théorème de l'hexagramme mystique de Pascal peut se démontrer pour un cercle avec des considérations d'angles, puis s'en déduire pour une ellipse par une affinité convenable. Mais si on constate que les hypothèse et la conclusion sont invariantes par une application projective (des conditions d'alignement !), on ne voit plus de raison de distinguer les ellipses des autres genres de coniques.

Ainsi, on gagne en généralité, tout en simplifiant la preuve. Exemples analogues avec les théorèmes de Pappus, Desargues, etc.

(Réf., once again : rapport Kahane ; [Audin].)

2° Figures comme espaces homogènes

(a) Sphères, hyperboloïdes (bof bof)

Munissons \mathbb{R}^n de sa métrique euclidienne standard. le groupe $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ opère transitivement sur la sphère unité, le stabilisateur d'un point est isomorphe à $\text{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$. En fixant un point de la sphère, on définit une bijection de $\text{SO}_n(\mathbb{R})/\text{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ sur la sphère, dont on montre qu'elle est un homéo ou même un difféomorphisme.

Munissons \mathbb{R}^n de la métrique $\sum_1^{n-1} x_i^2 - x_n^2$. Le groupe $\text{SO}(n-1, 1)$ opère transitivement sur l'hyperboloïde \mathcal{H} d'équation $\sum_1^{n-1} x_i^2 - x_n^2 = 1$, le stabilisateur d'un point est isomorphe à $\text{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$. En fixant un point de \mathcal{H} , on définit une bijection de $\text{SO}(n-1, 1)/\text{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ sur \mathcal{H} , dont on montre qu'elle est un homéo ou même un difféomorphisme.

Réf. : [Mneimné-Testard] prend ce point de vue pour point de départ, et explique que les “bons” objets géométriques sont les espaces homogènes G/H . Je ne sais pas ce qu’on peut en déduire du point de vue de la géométrie “classique”. Bien avancé.

(b) Le demi-plan de Poincaré comme espace homogène : $\mathcal{H} \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$

Soit $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. On fait opérer $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur \mathbb{C} par homographies, et on vérifie en VI que \mathcal{H} est stable.² On montre que cette action est transitive, et le stabilisateur du point i est le groupe des rotations $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. D’où l’identification du titre.

(c) Réseaux et demi-plan de Poincaré : $\mathcal{R}/\mathbb{C}^* \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$

On s’intéresse à l’ensemble \mathcal{R} des réseaux de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, i.e. des sous-groupes discrets de \mathbb{C} , abéliens libres de rang 2. Plus précisément, on veut réaliser l’ensemble \mathcal{R}/\mathbb{C}^* des réseaux à homothétie près comme un double quotient de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. C’est intéressant quand on veut classer les courbes elliptiques, i.e. les courbes complexes de genre 1 : cela permet de voir l’ensemble des classes d’isomorphisme de courbes elliptiques comme un objet géométrique (voir cours d’analyse complexe sur les fonctions elliptiques (et prolongements)).

Soit M l’ensemble des couples $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ tels que $\mathrm{Im} \omega_1/\omega_2 > 0$. Par définition, on a une première application évidente :

$$\pi : M \longrightarrow \mathcal{H}, \quad (\omega_1, \omega_2) \longmapsto \omega_1/\omega_2.$$

Bien sûr, π est surjective et deux éléments de M ont la même image si et seulement s’ils sont homothétiques : cette application identifie \mathcal{H} au quotient M/\mathbb{C}^* .

Voici une deuxième application naturelle :

$$\Lambda : M \longrightarrow \mathcal{R}, \quad (\omega_1, \omega_2) \longmapsto \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2.$$

Elle est surjective : tout réseau a une base et, si $(\omega_1, \omega_2) \in M$: $\Lambda(\omega_1, \omega_2) = \Lambda(-\omega_1, \omega_2)$.

On fait opérer $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur M : soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, et $(\omega_1, \omega_2) \in M$, on pose

$$\omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2,$$

Bien sûr, (ω_1, ω'_2) est une base de $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$, et, si on pose $z = \omega_1/\omega_2$ et $z' = \omega'_1/\omega'_2$, on a :

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} = g \cdot z,$$

si bien que $\mathrm{Im} z' > 0$ et que $(\omega'_1, \omega'_2) \in M$: c’est $g \cdot (\omega_1, \omega_2)$. On montre facilement :

Lemme *Deux éléments de M définissent le même réseau de \mathbb{R}^2 si, et seulement s’ils sont dans la même orbite sous $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. En d’autres termes, Λ induit une identification $M/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \simeq \mathcal{R}$.*

A présent, constatons que les actions de \mathbb{C}^* et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur commutent. De plus, on a vu que via l’application π , l’action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur M est envoyée sur l’action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur \mathcal{H} . On a essentiellement montré :

Proposition *L’application $(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \omega_1/\omega_2$ induit une identification : $\mathcal{R}/\mathbb{C}^* \simeq \mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.*

Réf. : [Serre, Cours d’arithmétique], Chap. VII, §2.2.

²On démontre en VI que les éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sont les isométries de \mathcal{H} pour une distance convenable, mais passons pour le moment.

V Applications inclassables

1° Structure de groupe et points entiers sur une hyperbole

Ici, deux groupes interviennent : d'une part, le groupe affine sert à justifier que toutes les hyperboles sont essentiellement "la même" ; d'autre part, on met une structure de groupe sur l'hyperbole, et on l'utilise pour trouver beaucoup de points entiers à partir de deux connus.

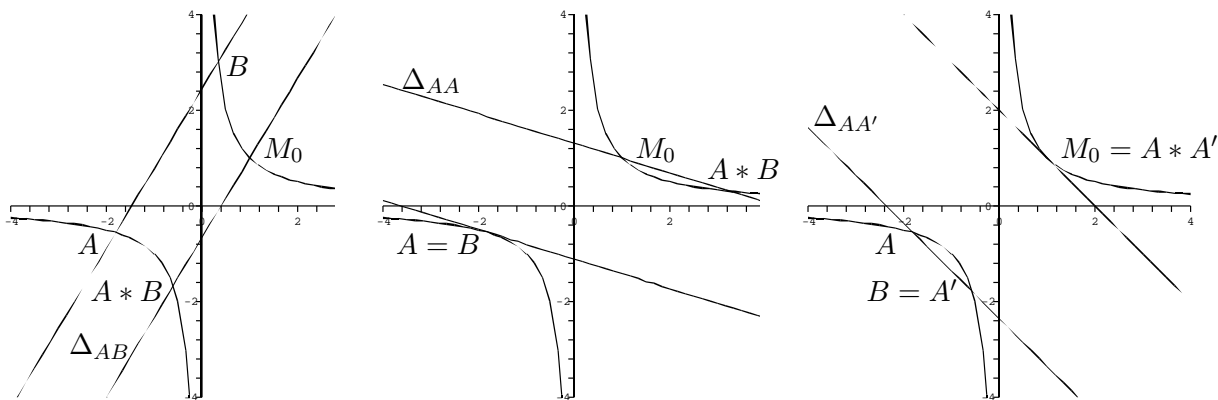
(a) L'hyperbole $XY = 1$

On fixe un plan affine et un repère de ce plan, dans lequel on note (X, Y) les coordonnées d'un point générique. On considère l'hyperbole \mathcal{H} d'équation $XY = 1$. La bijection $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^*$, qui, au point de coordonnées (X, Y) associe son abscisse X , permet de définir une structure de groupe sur \mathcal{H} par transport de structure :

$$\forall A, B \in \mathcal{H}, \quad A * B = \varphi^{-1}(\varphi(A)\varphi(B)).$$

Le neutre de $*$ est le point M_0 de coordonnées $(1, 1)$.

Or, on peut décrire la loi $*$ de façon géométrique : on trace la droite Δ_{AB} , parallèle à (AB) passant par M_0 (ou la parallèle à la tangente en A si $A = B$) ; elle coupe \mathcal{H} en deux points, M_0 et $A * B$ (il peut arriver que $A * B = M_0$, si Δ_{AB} est la tangente à \mathcal{H} en M_0).



(b) Hyperbole quelconque

Soit \mathcal{H} une hyperbole et M_0 un point de \mathcal{H} dans un plan affine muni d'un repère (O, i, j) , dans lequel on note (x, y) les coordonnées d'un point générique.³ Notons Ω le centre de l'hyperbole, u' et v' des vecteurs directeurs des asymptotes de \mathcal{H} . Si M_0 a pour coordonnées (α, β) dans le repère (Ω, u', v') , il a pour coordonnées $(1, 1)$ dans le repère (Ω, u, v) , où $u = \alpha u'$ et $v = \beta v'$. Dans ce dernier repère, l'équation de \mathcal{H} est : $XY = 1$ (pourquoi ?).

D'après le paragraphe précédent, on peut munir \mathcal{H} d'une structure de groupe $*$, dont M_0 est le neutre, et qui est définie de façon purement géométrique.

(c) Points entiers sur une hyperbole

Soit \mathcal{H} une hyperbole définie par une équation à coefficients entiers, dont on cherche les points entiers, i.e. à coordonnées entières. Pour prendre un exemple concret, on cherche les solutions entières de :

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1.$$

Supposons que M_0 soit un point entier de \mathcal{H} . Dans l'exemple, $M_0 = (0, 1)$ saute aux yeux. On considère la loi de groupe $*$ sur \mathcal{H} dont le neutre est M_0 . La clé, facile, est :

Lemme Si M et N sont des points entiers de \mathcal{H} , alors $M * N$ aussi.

³Cette phrase ne veut rien dire, n'est-ce pas ?

Supposons connaître un autre point entier M_1 sur la même branche de \mathcal{H} que M_0 , tel que l'arc d'hyperbole délimité par ces points ne contienne aucun autre point entier. Dans l'exemple, on peut prendre $M_1 = (3, 5)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_{n+1} = M_1 * M_n$ et $M_{-n} = M_n^{-1}$. Alors :

Lemme *Les points entiers de la branche de \mathcal{H} qui contient M_0 et M_1 sont les M_n ($n \in \mathbb{Z}$).*

Réf. : problèmes de CAPES interne 1991, Centrale 1997.

(d) Equation de Pell-Fermat

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré, on s'intéresse à l'équation

$$x^2 - ny^2 = 1.$$

Partant de la solution triviale $M_0 = (1, 0)$, ce qui précède permettrait de trouver toutes les solutions $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si on connaissait la plus petite, M_1 . Pour n petit, on peut procéder par tâtonnements. Par exemple, pour $n = 3$, on prend $M_1 = (2, 1)$; pour $n = 5$, on prend $M_1 = (9, 4)$. Mais ça devient vite compliqué.

Pour trouver M_1 de façon efficace, on sort du cadre de cette leçon, mais c'est stupéfiant : la solution est déterminée par le développement en fraction continue de \sqrt{n} . (Rappelons que les réels quadratiques, i.e. solutions d'une équation de degré 2 à coefficients entiers, tels \sqrt{n} , sont les seuls réels dont le développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang : c'est la clé.)

Réf. : Goblots, *Théorie des nombres*, §4.5-4.6, Ed. Dunod.

2° Paradoxe de Banach-Tarski, ou la multiplication des pains pour les nuls

L'énoncé est le suivant : on peut trouver trois partitions de la sphère unité (ou de la boule unité) S d'un espace euclidien de dimension 3 en un nombre fini de parties

$$S = A_1 \cup \dots \cup A_p \cup B_1 \cup \dots \cup B_q = A'_1 \cup \dots \cup A'_p = B'_1 \cup \dots \cup B'_q,$$

telles que les parties A_i et A'_i d'une part, et les parties B_j et B'_j d'autre part, soient isométriques. En termes plus imagés, on peut décomposer la sphère (ou la boule) en un puzzle de sorte qu'en déplaçant les pièces, on puisse reconstituer *deux sphères (ou boules) de même rayon*.

Impossible, pensez-vous, puisque l'aire n'est pas préservée ? Eh bien, cela signifie simplement que les A_i et les B_j ne sont pas mesurables. Cette construction repose sur l'axiome du choix (voir ci-dessous), et démontre que l'axiome du choix n'est pas compatible avec l'existence d'une mesure invariante par isométries sur toutes les parties d'une sphère de dimension 2.

Et les groupes, dans tout ça ? Pour démontrer ce résultat, l'ingrédient essentiel est un groupe libre engendré par deux rotations dans $SO_3(\mathbb{R})$. On fait opérer ce groupe sur la sphère, et on se ramène à travailler sur le groupe libre en choisissant un représentant par orbite (c'est là qu'intervient, crucialement, l'axiome du choix). On partitionne alors le groupe libre en parties "paradoxaes", etc.

Réf. : CAPES externe, écrit 2004 (annales à faire acheter et mettre dans la caisse) ou *Le paradoxe de Banach-Tarski*, Marc Guinot, Ed. Aléas, ou, d'ici les oraux :

<http://www.umpa.ens-lyon.fr/JME/Vol1Num1/artAReissman/artAReissman.pdf>

VI Géodésiques du demi-plan de Poincaré

Réf. : [Audin], Ex. VI.52 (pas beaucoup de détails). [Berger] ?

1° Le demi-plan de Poincaré et les homographies

On note

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

le demi-plan de Poincaré. On repère un point de \mathcal{H} par son affixe $z \in \mathbb{C}$ ou ses coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, avec $z = x + iy$. On note $\operatorname{PGL}_2^+(\mathbb{R})$ le quotient du groupe des matrices réelles 2×2 de déterminant > 0 par son centre, les matrices diagonales qu'il contient.

Lemme *Le groupe $\operatorname{PGL}_2^+(\mathbb{R})$ agit par homographies sur \mathcal{H} . Il constitue le stabilisateur de $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans $\operatorname{PGL}_2(\mathbb{C})$.*

Preuve : Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, représentant un élément de $\operatorname{PGL}_2^+(\mathbb{R})$, et $z = x + iy \in \mathcal{H}$:

$$\operatorname{Im}(g \cdot z) = \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + (cy)^2} > 0.$$

Inversement, si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$ stabilise \mathcal{H} , alors g stabilise aussi le bord de \mathcal{H} , donc $g \cdot \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$. Or, pour z au voisinage de 0, on a, sous l'hypothèse peu contraignante $d \neq 0$:

$$g \cdot z = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{b}{d} + \frac{ad - bc}{d^2} z - \frac{ad - bc}{d^3} cz^2 + O(z^3).$$

On en déduit successivement que $b/d \in \mathbb{R}$, que $(ad - bc)/d^2 \in \mathbb{R}$, que $c/d \in \mathbb{R}$, et que $a/d = bc/d^2 + (ad - bc)/d^2 \in \mathbb{R}$: en d'autres termes, $g \in \operatorname{PGL}_2(\mathbb{R})$. Si on avait $\det(g) < 0$, le calcul de $\operatorname{Im}(g \cdot z)$ montre que $g \cdot \mathcal{H}$ serait le demi-plan inférieur, contradiction. \square

2° Une métrique invariante

A présent, on fait de \mathcal{H} un espace métrique et on montre que $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit par isométries sur \mathcal{H} . On munit \mathcal{H} de la métrique suivante :

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = -4 \frac{dz d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2}.$$

Sens : Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ est une courbe \mathcal{C}^1 tracée dans \mathcal{H} , sa longueur est :

$$\ell(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_0^1 \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{y(t)} dt,$$

où \dot{x} et \dot{y} sont les dérivées de x et y (par rapport à t).

Proposition *La métrique $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ est invariante par homographies : pour $g \in \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$, on a : $\ell(g \cdot \gamma) = \ell(\gamma)$.*

Preuve : Supposons que $g \cdot z = z + u$ pour $u \in \mathbb{R}$ fixé, il est évident que $\ell(g \cdot \gamma) = \ell(\gamma)$. Supposons que $g \cdot z = -1/z$. Alors, en notant $z' = -1/z$, on a : $dz' = -z^{-2} dz$, si bien que

$$ds'^2 = -4 \frac{dz' d\bar{z}'}{(z' - \bar{z}')^2} = -4 \frac{\frac{dz}{z^2} \frac{d\bar{z}}{\bar{z}^2}}{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}\right)^2} = -4 \frac{dz d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2} = ds^2.$$

Il en résulte que $\ell(g \cdot \gamma) = \ell(\gamma)$ pour $g \cdot z = -1/z$. On peut aussi faire le changement de variable qui va bien dans l'intégrale en travaillant en coordonnées x, y , mais c'est moins efficace. Pour conclure, on utilise le lemme suivant :

Lemme *Les classes de $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T_u = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($u \in \mathbb{R}$) engendrent $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$.*

Preuve : Constater que $ST_u S^{-1}$ est la transposée de T_{-u} , donc on engendre toutes les transvections, donc on engendre tout le groupe. \square

3° Une distance et ses géodésiques

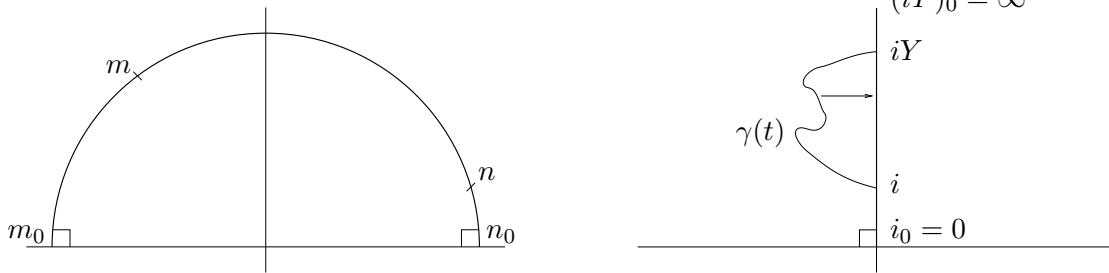
On définit la distance entre deux points $m, n \in \mathcal{H}$ par :

$$d(m, n) = \inf_{\gamma} \ell(\gamma),$$

où $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$ parcourt l'ensemble des courbes \mathcal{C}^1 telles que $\gamma(0) = m$ et $\gamma(1) = n$. Une courbe dont la longueur réaliserait la borne inférieure serait appelée géodésique reliant m et n . Problèmes : est-ce que ça existe ? est-ce que c'est unique, une telle courbe ? Eh bien, oui !

Proposition Soit $m, n \in \mathcal{H}$, $m \neq n$. Il existe un unique cercle contenant m et n et orthogonal à l'axe réel $\{\text{Im} = 0\}$. L'arc de ce cercle délimité par m et n qui est contenu dans \mathcal{H} est la géodésique reliant m et n . De plus, si m_0 et n_0 sont les points d'intersection du cercle avec l'axe réel, de sorte à trouver dans l'ordre m_0, m, n et n_0 , on a :

$$d(m, n) = \ln[m, n, n_0, m_0].$$



Idée On régularise la figure ! Dans le cas particulier de la figure de droite, il est très facile de voir que la géodésique est le segment $[i, iY]$ et que la longueur de ce segment est $\ln Y$. On exprime cette quantité de sorte qu'elle devienne invariante par les isométries de \mathcal{H} , et on ramène le cas général à ce cas particulier.

Preuve : Cas particulier : $m = i$, $n = iY$ (où $i^2 = -1$). Fixons une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$ de classe \mathcal{C}^1 , avec $\gamma(0) = i$ et $\gamma(1) = iY$. Soit $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$ la projection orthogonale de γ sur l'axe des ordonnées : si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $\bar{\gamma}(t) = iy(t)$. On a :

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\sqrt{\dot{y}(t)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{|\dot{y}(t)|}{y(t)} dt = \ell(\bar{\gamma}),$$

Il en résulte qu'une courbe est plus longue que sa projection sur l'axe imaginaire pur, et on en déduit que la courbe la plus courte qui relie i et iY est le segment $[i, iY]$. Ainsi, ce segment est l'unique géodésique entre i et iY , et de plus, en paramétrant ce segment par $\gamma(t) = i(1 + t(Y - 1))$, on obtient :

$$d(i, iY) = \int_0^1 \frac{Y - 1}{1 + t(Y - 1)} dt = \int_1^Y \frac{dy}{y} = \ln Y = \ln[i, iY, \infty, 0].$$

Constatant que $i_0 = 0$ et $(iY)_0 = \infty$, on a démontré la formule dans ce cas.

Cas général. Soit $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ une homographie qui envoie m sur i et n sur un point de partie réelle nulle iY , avec $Y \in \mathbb{R}$, $Y > 1$. (Existence d'un tel g ?) Comme les homographies sont des isométries de \mathcal{H} , on a : $d(m, n) = d(i, iY)$. De plus, l'axe des ordonnées est l'image de l'unique cercle orthogonal à l'axe réel qui contient m et n (existence de ce cercle ? unicité ? quid si m et n ont même partie réelle ?), et on a : $g(m_0) = 0$, $g(n_0) = \infty$. Il en résulte que la géodésique reliant m et n est l'image réciproque par g du segment $[i, iY]$. De plus, par invariance du birapport, on a :

$$d(m, n) = d(i, iY) = \ln[i, iY, \infty, 0] = \ln[m, n, n_0, m_0]. \square$$

4° Cercles du demi-plan de Poincaré

Question : Qu'est-ce qu'un cercle de Poincaré ? Etant donné $m \in \mathcal{H}$, il s'agit de décrire les ensembles de points équidistants de m pour la distance d ci-dessus.

Réponse : Pour des raisons que je vous laisse préciser (ça relève de la géométrie différentielle amusante), les cercles sont les *trajectoires orthogonales des géodésiques*. En d'autres termes, un cercle de centre m est une courbe dont la tangente en tout point n est orthogonale à la géodésique reliant m et n .

Or, toutes les géodésiques sont situées sur des cercles orthogonaux à l'axe réel, donc symétriques par rapport à celui-ci. Les géodésiques contenant m contiennent donc son conjugué \bar{m} . On voit ainsi que les géodésiques forment le *faisceau de cercles à points bases m et \bar{m}* (enfin, la partie contenue dans \mathcal{H}). Les trajectoires orthogonales de ces cercles forment le *faisceau de cercles à points limites m et \bar{m}* . Ainsi, un cercle de Poincaré est un cercle euclidien.

Réf. : [Audin], fin du chapitre III pour les faisceaux de cercles. Peut-être cette remarque sur les cercles de Poincaré figure-t-elle quelque part.