

En guise d'introduction

Quelques problèmes de classification en algèbre linéaire élémentaire :

1. classer les espaces vectoriels (à isomorphisme près) ;
2. classer les applications linéaires entre deux espaces différents (ou les matrices rectangulaires à équivalence près) ;
3. classer les endomorphismes linéaires d'un espace donné (ou les matrices carrées à similitude près) ;
4. classer les paires de matrices à similitude simultanée près.

Le problème 1. reçoit une réponse complète grâce au théorème de la base incomplète et au fait que deux bases d'un même espace ont le même cardinal. La dimension est un invariant rudimentaire, mais suffisant pour classer les espaces vectoriels à isomorphisme près.

Le problème 2. reçoit une réponse complète grâce au théorème du rang : une application linéaire réalise un isomorphisme de tout supplémentaire du noyau sur l'image. Ainsi, le triplet formé des dimensions des espaces de départ, d'arrivée et de l'image permettent de classer les applications linéaires à isomorphismes près, les isomorphismes pouvant être différent à la source et au but.

Le problème 3. possède deux réponses classiques : la décomposition d'une matrice en blocs de Jordan et les invariants de similitude.

Le problème 4. est beaucoup plus compliqué, et ne possède pas d'aussi bonne réponse que les précédents. On peut montrer que si on savait "classer" les paires de matrices carrées à conjugaison simultanée près, on en déduirait par là-même une "classification" de *toutes* les algèbres de dimension finie et *toutes* leurs représentations. Ce n'est guère raisonnable. Ce problème n'apparaît dans la liste ci-dessus que pour souligner qu'elle n'est pas exhaustive...

A ne pas rater dans cette leçon

1. caractérisations des endomorphismes trigonalisables ; parler de drapeau invariant ; théorème de Cayley-Hamilton selon cette idée ;
2. caractérisations des endomorphismes nilpotents (par le polynôme caractéristique et par les traces des puissances –en caractéristique nulle) ;
3. décomposition de Dunford (diagonalisable + nilpotent) ;
4. noyaux itérés ; la suite des dimensions "s'essouffle" (voir Mneimné, *Éléments de géométrie* ;
5. intéressant, mais pas si indispensable : décomposition d'un endomorphisme nilpotent en blocs de Jordan : existence et unicité des tailles des blocs ;
6. idem : décomposition de Jordan d'un endomorphisme quelconque (mélanger 3 et 5) ;
7. bijection entre nilpotents et unipotents via l'exponentielle.

Autres points intéressants ($\simeq$ autant de développements possibles)

1. invariants de similitude (plus dur, très rentable si c'est maîtrisé) ;
2. théorème de Burnside (pour un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$, être fini équivaut à être d'exposant fini) ; ¹
3. exponentielle et matrices nilpotentes : décomposition de Dunford de l'exponentielle, diagonalisabilité de l'exponentielle, etc.
4. formule du rayon spectral : pour $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$, $\rho(A) = \limsup \|A^k\|^{1/k}$ (application de Dunford).

Ordre des points traités

Pas uniquement défini. Le centre névralgique de la leçon, c'est le théorème de Jordan, *existence et unicité*. Pour cela, on se place sur un corps algébriquement clos. Cela enrichit la leçon de le présenter comme un théorème de classification. Il faut donc comprendre et rendre clair que la décomposition en sous-espaces caractéristiques *réduit* le problème de classification/structure des endomorphismes au cas nilpotent :

1. étant donné $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe une famille canonique de sous-espaces sur lesquels $u - \lambda \text{Id}$ est nilpotent (pour λ convenable) : les espaces caractéristiques ;
2. la classe de similitude d'un endomorphisme nilpotent est déterminée par une partition de la dimension de l'espace, qui décrit les tailles de ses blocs de Jordan.

Description de la suite

Ceci n'est pas un plan.

Les développements 2° et 3° me semblent s'intégrer au mieux dans la leçon. Le premier va aussi très bien dans la leçon "Sous-espaces stables", le deuxième a son charme ; pour le solliciter de la part du jury, il faut l'intituler "Unicité des blocs de Jordan et images et noyaux itérés". Peut-être faut-il proposer ces deux développements ensemble ?

La partie III est ici plutôt préliminaire : elle rentre plutôt mieux dans la leçon "Endomorphismes diagonalisables" si on ajoute les choses qui ne sont qu'évoquées ici. Il faut en tout cas *retenir* ce qu'est une matrice-compagnon, et constater qu'un bloc de Jordan nilpotent est la matrice-compagnon du polynôme X^d .

Le développement IV, sur les invariants de similitude, est plus sophistiqué. Ce qui est présenté ici est essentiellement une resucée de [Debarre] sans les preuves... Autres références, publiées mais moins bien écrites : [Gourdon] et [Tauvel].

Je considère ce développement plutôt comme "niveau 2" : très rentable s'il est maîtrisé, mais plus difficile que ce qui précède –en particulier, parce qu'on n'a pas (encore ?) de référence "autorisée" (du coup, la version de M. Sébastien devient bien meilleure...) ; pas indispensable pour avoir l'agrégation. En tout cas, un beau morceau de belles mathématiques !

¹A ce propos, notons que ce théorème est faux si on remplace $\mathbb{C}$ par un corps K infini de caractéristique non nulle. Prendre par exemple $G = \begin{pmatrix} 1 & K \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dont l'exposant est la caractéristique de K . Le fait qu'un élément de $GL_n(K)$ d'ordre fini soit diagonalisable est, si j'ose dire, caractéristique de la caractéristique nulle.

I Remarques en vrac

1° Séries formelles (calcul fonctionnel 1)

Soit $\mathbb{C}[[X]]$ l'algèbre des séries formelles complexes. La donnée d'un espace vectoriel de dimension finie muni d'un endomorphisme nilpotent est équivalente à la donnée d'un $\mathbb{C}[[X]]$ -module de dimension finie.

En effet, si M est un espace vectoriel de dimension finie et si u est un endomorphisme nilpotent, on constate que pour $f \in \mathbb{C}[[X]]$, $f(u)$ est un polynôme en u . On fait alors de M un $\mathbb{C}[[X]]$ -module en posant, pour $m \in M$ et $f \in \mathbb{C}[[X]]$, $f \cdot m = f(u)(m)$.

Inversement, soit M un $\mathbb{C}[[X]]$ -module qui est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie (où la multiplication par les scalaires est définie via l'injection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}[[X]]$ (séries constantes !)). Alors la multiplication par X est un endomorphisme linéaire u de M .

Or pour tout $l \in \mathbb{C}^*$, la série $\lambda - X$ est inversible dans $\mathbb{C}[[X]]$:

$$(\lambda - X)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{X}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{X}{\lambda}\right)^k = \sum_{k \geq 0} \lambda^{-k-1} X^k.$$

La multiplication par $(\lambda - X)^{-1}$ est un inverse de $(\lambda \text{Id} - u)$ dans les endomorphismes de M , si bien que λ n'est pas une valeur propre de u . Ainsi, la seule valeur propre de u est 0, ce qui prouve que u est nilpotent.

(On adapte la preuve pour passer de $\mathbb{C}$ à un corps quelconque K : pour tout polynôme irréductible P différent de X , le terme constant de P n'est pas nul, donc P est inversible dans $K[[X]]$, donc $P(u)$ est inversible dans les endomorphismes de M (inverse : multiplication par $1/P$ dans le $K[[X]]$ -module M).)

On vérifie que les choses raisonnables sont vraies : les deux correspondances précédentes sont inverses l'une de l'autre et font se correspondre les morphismes de chacune des structures. En termes sophistiqués, on parle d'*équivalence de catégories*.

2° Nilpotents et unipotents via l'exponentielle (calcul fonctionnel 2)

Ici, on fixe un corps K de caractéristique 0 quelconque, éventuellement $\mathbb{Q}$, et on se place dans $\mathcal{M}_n(K)$.

L'ensemble des matrices nilpotentes est noté $\mathcal{N}$. Une matrice B est dite unipotente si sa seule valeur propre dans une clôture algébrique de K est 1. Il est équivalent de dire que $B - \text{Id}$ est nilpotente. L'ensemble des unipotentes est noté $\mathcal{U}$.

Correspondances entre $\mathcal{N}$ et $\mathcal{U}$: pour $A \in \mathcal{N}$, $\exp A$ (qui est un polynôme en A à coefficients rationnels) est unipotente ; pour $B \in \mathcal{U}$, on définit

$$\log(B) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (B - \text{Id})^k :$$

c'est un élément de $\mathcal{N}$ (pourquoi ?).

Montrons que $\exp \log(\text{Id} + A) = \text{Id} + A$ pour toute matrice nilpotente A . Pour cela, Mneimné et Testard proposent une méthode fondée sur la résolution d'une équation différentielle qui semble un peu hors de propos et a déjà été épinglée par le rapport du jury (sais plus quelle année). Ce dernier suggère de parler de développements limités.

Comme on a fixé la dimension, toutes les matrices nilpotentes A satisfont $A^n = 0$. On sait que les fonctions réelles $\exp$ et $x \mapsto \log(1+x)$ ont un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$\exp(x) = E_n(x) + O(x^{n+1}), \quad \log(1+x) = L_n(x) + O(x^{n+1}),$$

où E_n et L_n sont deux polynômes de degré au plus n . Le théorème de composition des développements limités exprime que $x \mapsto \exp \log(1+x)$ a pour développement limité la troncature du polynôme composé $E_n \circ L_n$ à l'ordre $n+1$. Par unicité du développement limité, la composée est $1+x$, ce qui s'écrit : $E_n(L_n(X)) = 1+X \pmod{X^{n+1}}$.

En évaluant cette égalité polynômiale en A , on obtient l'identité souhaitée. On procède de même pour montrer que $\log \exp(A) = A$.

3° Cas de la dimension 2

On trouve dans R. Mneimné, *Eléments de géométrie*, §0-C.9 (ou 10 ?) exploité le constat facile suivant : sur l'espace de dimension 3 des matrices 2×2 de trace nulle, le déterminant est une forme quadratique, donc il définit une conique projective.

Ce qui est amusant, c'est la correspondance entre propriétés "géométriques" de la conique et propriétés "algébriques". Par exemple : si $K = \mathbb{R}$, on peut mener deux plans tangents au cône nilpotent issus d'une matrice A de trace nulle SSI A est diagonalisable. La polaire d'un point par rapport à la conique est essentiellement² le commutant d'une matrice. Etc.

II Décomposition de Jordan

1° Démonstration "normale" de la décomposition de Jordan

Référence : R. Mneimné, *Eléments de géométrie*, §0-C.2 et §0-C.11.1.

(a) Injections de Frobenius

Proposition Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $\ell \geq 0$, u induit une injection

$$\text{Ker } u^{\ell+1} / \text{Ker } u^\ell \longrightarrow \text{Ker } u^\ell / \text{Ker } u^{\ell-1}.$$

Fixons $\ell \geq 0$. Il faut commencer par vérifier que l'application est bien définie. Pour cela, on constate d'abord que

$$u(\text{Ker } u^{\ell+1}) \subset \text{Ker } u^\ell, \quad \text{car } u^{\ell+1}(x) \Rightarrow u^\ell(u(x)) = 0.$$

En composant avec la projection canonique, u induit donc une application

$$\tilde{u} : \text{Ker } u^{\ell+1} \longrightarrow \text{Ker } u^\ell / \text{Ker } u^{\ell-1}.$$

Notons que, pour $x \in E$, on a trivialement :

$$\tilde{u}(x) = 0 \iff u(x) \in \text{Ker } u^{\ell-1} \iff u^\ell(x) = 0,$$

si bien que le noyau de $\tilde{u}$ est $\text{Ker } u^\ell$. D'où la proposition.

(b) Existence d'une décomposition de Jordan

Théorème Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Il existe $s \in \mathbb{N}^*$, des vecteurs $e_1, \dots, e_s$ et des entiers $\ell_1, \dots, \ell_s \geq 1$ tels que les vecteurs

$$\begin{array}{ccccccc} e_1 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ & e_2 & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & e_3 & & \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & e_s \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & \vdots & \dots & \vdots \\ u^{\ell_1-1}(e_1) & u^{\ell_2-1}(e_2) & u^{\ell_3-1}(e_3) & \dots & u^{\ell_s-1}(e_s) & & \end{array}$$

forment une base de E . Dans cette base, la matrice de u est diagonale par blocs de Jordan de tailles $\ell_1, \dots, \ell_s$. De plus, s et $(\ell_i)_{i=1, \dots, s}$ sont parfaitement déterminés par u .

²c'est-à-dire, via la correspondance droite projective $\longleftrightarrow$ plan affine.

Attention ! Attention, la démonstration ci-dessous ne prouve que l'existence, et pas l'unicité. Non, n'insistez pas : ce n'est pas parce que les nombres de blocs de chaque taille que l'on a trouvés par la méthode choisie ont une taille qui s'exprime en fonction de u qu'il n'existe pas une méthode qui produise une base où les blocs ont des tailles différentes. Pour l'unicité, voir $\mathcal{P}^\circ$.

Quitte à marteau-pilonner, répétons que l'on ne prouve que l'existence ici. Soit k l'indice de nilpotence de u : $u^k = 0$, $u^{k-1} \neq 0$. Convenons qu'une barre au-dessus d'un vecteur désigne la classe de ce vecteur dans l'espace vectoriel quotient dont il est question.

On fixe une base $(\overline{e_1}, \dots, \overline{e_{b_k}})$ de $E / \text{Ker } u^{k-1} = \text{Ker } u^k / \text{Ker } u^{k-1}$, et on la relève en une famille libre $(e_1, \dots, e_{b_k})$ de E . Il y aura b_k blocs de taille maximale k dans la matrice jordanisée.

Comme u induit une injection $E / \text{Ker } u^{k-1} \rightarrow \text{Ker } u^{k-1} / \text{Ker } u^{k-2}$, la famille $(\overline{u(e_1)}, \dots, \overline{u(e_{b_k})})$ est libre dans $\text{Ker } u^{k-1} / \text{Ker } u^{k-2}$. On la complète en une base, que l'on relève en une famille $(u(e_1), \dots, u(e_{b_k}), e_{b_k+1}, \dots, e_{b_k+b_{k-1}})$ de $\text{Ker } u^{k-1}$.

2° Existence d'une décomposition de Jordan (autre approche)

Source : site de préparation à l'agrégation de F.-X. Dehon à Nice. Mais le paragraphe (d) est une version de la décomposition de Frobenius de [Gourdon], qui se simplifie grandement dans le cas nilpotent.

(a) Une preuve du théorème de Cayley-Hamilton et une remarque

(b) Commençons par rappeler une preuve classique du théorème de Cayley-Hamilton. On se donne $u \in \mathcal{L}(E)$, et on veut démontrer que son polynôme caractéristique χ_u annule u .

On fixe $x \in E$ non nul. On note k le plus grand entier tel que $(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x))$ est libre. C'est donc qu'il existe $a_0, \dots, a_{k-1} \in K$ tels que

$$u^k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} -a_i u^i(x), \quad \text{soit} \quad f(u)(x) = 0, \quad \text{où} \quad f = X^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i.$$

On complète $(x, \dots, u^{k-1}(x))$ en une base. Dans cette base, la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} C_f & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

où C_f est la matrice-compagnon du polynôme f (voir III).

Le polynôme caractéristique de C_f , c'est-à-dire f , divise donc χ_u ; comme de plus, on a : $f(u)(x) = 0$, il vient : $\chi_u(u)(x) = 0$. Le théorème de Cayley-Hamilton en résulte.

(c) Maintenant, que nous manque-t-il pour passer au théorème de Jordan ? Si u est nilpotent, le f qui apparaît est nécessairement X^k , donc sa matrice-compagnon est un bloc de Jordan, donc les k premières colonnes de la matrice ci-dessus sont parfaites. On pourrait conclure par récurrence sur la dimension si on avait 0 à la place de $*$ dans le bloc en haut à droite. Pour cela, il faudrait pouvoir trouver un supplémentaire stable à $\text{Vect}(x, \dots, u^{k-1}(x))$.

(d) **Existence d'une décomposition de Jordan, noyaux et images itérés** Soit u un endomorphisme nilpotent et k son indice de nilpotence.

(e) Par hypothèse, u^k est nul, mais pas u^{k-1} . On choisit un vecteur $x \in E$ tel que $u^{k-1}(x) \neq 0$. On choisit une forme linéaire $\ell \in E^*$ telle que $\ell \circ u^{k-1}(x) \neq 0$. (Existence de ℓ : compléter x en une base de E ; prendre le premier vecteur de la base duale.)

(f) Ces choix étant faits, on pose :

$$E_x = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)), \quad E_\ell = \bigcap_{i \geq 0} \text{Ker}(\ell \circ u^i) = \bigcap_{i=0}^{k-1} \text{Ker}(\ell \circ u^i).$$

On va montrer que E_ℓ est un supplémentaire de E_x stable par u .

Pour montrer que E_ℓ est stable par u , on fixe $y \in E_\ell$, alors on a :

$$y \in \bigcap_{i \geq 1} \text{Ker}(\ell \circ u^i), \quad \text{donc} \quad u(y) \in \bigcap_{i \geq 1} \text{Ker}(\ell \circ u^{i-1}) = E_\ell.$$

Montrons que E_x et E_ℓ sont supplémentaires. Soit $y \in E$, on cherche $a_0, \dots, a_{k-1} \in K$ tels que

$$y - \sum_{j=0}^{k-1} a_j u^j(x) \in E_\ell.$$

Pour que cette condition soit réalisée, il est nécessaire et suffisant que l'on ait :

$$\ell \circ u^i \left(y - \sum_{j=0}^{k-1} a_j u^j(x) \right) = 0, \quad \text{soit} \quad \sum_{j=0}^{k-1-i} a_j \ell \circ u^{i+j}(x) = \ell \circ u^i(y) \quad (i = 0, \dots, k-1).$$

On obtient un système de k équations en les k inconnues a_i : ce système est triangulaire et le coefficient de a_j dans la j ème équation est $\ell \circ u^k(x) \neq 0$. Il possède donc une unique solution. On en déduit l'existence d'un unique vecteur $w \in E_x$ tel que $y - w \in E_\ell$.

Ainsi, E_ℓ est un supplémentaire u -stable de E_x .

(g) Par récurrence sur $\dim E$, on en déduit qu'il existe une suite de sous-espaces supplémentaires $F_1, \dots, F_r$, stables par u , tels que la restriction de u à F_j ($j = 1, \dots, r$) est nilpotente d'indice de nilpotence maximal.

(h) En d'autres termes, la restriction de u à chaque F_j est cyclique, ou encore, la matrice de cette restriction est (la transposée d'un) bloc de Jordan. La partie "existence" du théorème de Jordan est démontrée.

3° Unicité de la décomposition de Jordan

(a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Supposons acquise l'existence d'une décomposition de Jordan, i.e. l'existence de vecteurs $e_1, \dots, e_s$ et d'entiers $\ell_1 \geq \dots \geq \ell_s \geq 1$ tels que les vecteurs

$$\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_s \\ u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) & \cdots & u(e_s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & u^{\ell_s-1}(e_s) \\ \vdots & \vdots & u^{\ell_3-1}(e_3) & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & u^{\ell_2-1}(e_2) & & & \\ u^{\ell_1-1}(e_1) & & & & \end{array}$$

forment une base de E , avec

$$u^{\ell_1}(e_1) = \dots = u^{\ell_s}(e_s) = 0.$$

En d'autres termes, on a s blocs de Jordan, de tailles respectives $\ell_1, \dots, \ell_s$. On notera F_j l'espace engendré par les $u^k(e_j)$ ($k \in \mathbb{N}$).

(b) Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, notons b_ℓ le nombre de blocs de Jordan de taille ℓ de cette décomposition. On veut montrer que ces nombres ne dépendent que de u , et pas de notre choix d'une base de Jordan. Pour cela, on fait intervenir les images itérées $\text{Im } u^k$ ($k \in \mathbb{N}$).

En appliquant u et en supprimant les vecteurs nuls, il est immédiat de voir que :

$$\text{Im } u = \text{Vect}(u(e_1), \dots, u^{\ell_1-1}(e_1), \dots, u(e_s), \dots, u^{\ell_s-1}(e_s)).$$

Plus généralement, on a, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\text{Im } u^k = \text{Vect}(u^k(e_1), \dots, u^{\ell_1-1}(e_1), \dots, u^k(e_s), \dots, u^{\ell_s-1}(e_s)).$$

En supprimant les vecteurs nuls, on constate que pour chaque indice $j = 1, \dots, s$, le sous-espace $\text{Im } u^k \cap F_j$ est trivial si $k \geq \ell_j$ et engendré par $u^k(e_j), \dots, u^{\ell_j-1}(e_j)$ si $k \leq \ell_j - 1$.

En d'autres termes, si $\ell_j \geq k + 1$, le j ème bloc de Jordan contribue pour $\ell_j - k$ au rang de u^k :

$$\dim \text{Im } u^k = \sum_{j: \ell_j \geq k+1} (\ell_j - k) = \sum_{\ell \geq k+1} (\ell - k) b_\ell.$$

On traduit ces égalités par une relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \text{rg } u^0 \\ \text{rg } u^1 \\ \vdots \\ \text{rg } u^{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ & \ddots & \ddots & & n-1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & & \ddots & 2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

A ce stade, il suffit de remarquer que A est inversible pour prouver que le nombre de blocs de chaque taille ne dépend que de u . Mais on va plus loin.

(c) Dans un premier temps, on remarque que

$$A = \sum_{i \geq 0} (i+1) J^i = \sum_{j \geq 1} j J^{j-1},$$

où J est le bloc de Jordan de taille n que vous imaginez. Notons que A est unipotente. Or, pour $z \in \mathbb{C}$ de module $|z| < 1$, on a :

$$\sum_{j \geq 1} j z^{j-1} = \frac{d}{dz} \sum_{j \geq 0} z^j = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = (1-z)^{-2}.$$

On en déduit une identité de séries entières, puis, par unicité du développement en série entière, de séries formelles :

$$(1-X)^2 \sum_{i \geq 0} (i+1) X^i = 1,$$

qui est encore valable lorsqu'on remplace X par J . En d'autres termes : $A^{-1} = (I - J)^2 = I^2 - 2J + J^2$. Il en résulte :

$$\boxed{\forall \ell = 1, \dots, n, \quad b_\ell = \text{rg } u^{\ell-1} - 2 \text{rg } u^\ell + \text{rg } u^{\ell+1}.}$$

(d) Donnons une preuve directe de cette formule. Pour cela, on l'écrit sous la forme suivante, pour $\ell = 1, \dots, n$:

$$b_\ell = \dim \text{Im } u^{\ell-1} - \dim \text{Im } u^\ell - \left(\dim \text{Im } u^\ell - \dim \text{Im } u^{\ell+1} \right)$$

$$\boxed{b_\ell = \dim (\text{Im } u^{\ell-1} / \text{Im } u^\ell) - \dim (\text{Im } u^\ell / \text{Im } u^{\ell+1}).}$$

Démontrons donc ces égalités. Dans le tableau du (a), $\text{Im } u^{\ell-1}$ est engendré par les vecteurs qui sont dans la ℓ ème ligne à partir d'en haut ou en-dessous. Donc le quotient $\text{Im } u^{\ell-1} / \text{Im } u^\ell$ a pour base (les classes de) les vecteurs qui sont exactement sur la ℓ ème ligne.

En d'autres termes, $\dim(\text{Im } u^{\ell-1} / \text{Im } u^\ell)$ est le nombre de blocs qui sont de taille au moins ℓ . Il en résulte que le nombre de blocs de taille exactement ℓ est bien celui que nous avons calculé.

(e) Grâce au théorème du rang ($\text{rg } u^k = \dim E - \dim \text{Ker } u^k$), on voit que l'on a aussi :

$$\begin{aligned} b_\ell &= -\dim \text{Ker } u^{\ell-1} + 2 \dim \text{Ker } u^\ell - \dim \text{Ker } u^{\ell+1} \\ &= \dim \text{Ker } u^\ell - \dim \text{Ker } u^{\ell-1} - (\dim \text{Ker } u^{\ell+1} - \dim \text{Ker } u^\ell), \end{aligned}$$

$$\boxed{b_\ell = \dim (\text{Ker } u^\ell / \text{Ker } u^{\ell-1}) - \dim (\text{Ker } u^{\ell+1} / \text{Ker } u^\ell).}$$

Pour écrire une preuve directe de cette dernière formule, on peut raisonner “dualement” à partir du tableau :

$$\begin{array}{ccccccc} & e_1 & & & & & \\ & \vdots & & e_2 & & & \\ & \vdots & & \vdots & & & \\ & \vdots & & \vdots & & e_3 & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & e_s \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ u^{\ell_1-1}(e_1) & u^{\ell_2-1}(e_2) & u^{\ell_3-1}(e_3) & \cdots & u^{\ell_s-1}(e_s) & & \end{array}$$

Dans ce tableau, on “lit” que la dimension de $\text{Ker } u^\ell$ est le nombre de vecteurs situés sur les ℓ premières lignes à partir d’en bas, donc la dimension de $\text{Ker } u^\ell / \text{Ker } u^{\ell-1}$ est le nombre de vecteurs sur la ℓ ème ligne, ce qui est aussi le nombre de blocs de taille au moins ℓ . On conclut.

4° Adhérence d’orbites nilpotentes

Le théorème de Jordan établit une bijection entre les classes de similitude de matrices nilpotentes $n \times n$ et les partitions de n , i.e. les suites $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}$ décroissantes d’entiers naturels telles que $\sum_i \lambda_i = n$. Si $\mathcal{O}_\lambda$ désigne l’ensemble des matrices nilpotentes semblables à la matrice diagonale par blocs ayant pour blocs $J_{\lambda_1}, J_{\lambda_2}, \dots$, il est intéressant de déterminer l’adhérence de $\mathcal{O}_\lambda$.

Propriétés relativement simples :

- la matrice nulle est dans l’adhérence de tous les $\mathcal{O}_\lambda$;
- la classe du bloc de Jordan de taille n , correspondant à la partition à une part non nulle (n) , est ouverte et dense dans le cône nilpotent.

Propriété difficile : pour μ et λ deux partitions, $\mathcal{O}_\mu$ est inclus dans l’adhérence de $\mathcal{O}_\lambda$ si et seulement si pour tout k , $\mu_1 + \dots + \mu_k \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_k$.

Remarque : le nombre de partitions de n est le coefficient $p(n)$ de X^n de la série formelle $\prod_{k \geq 1} (1 - X^k)^{-1}$.

5° Applications de la décomposition de Jordan

(a) **Standard et pas palpitant** Une matrice est semblable à sa transposée.

Si c’est un bloc de Jordan $d \times d$, cela se voit en renversant l’ordre des vecteurs de la base ($e_i \longleftrightarrow e_{d-i}$ pour tout i).

Si elle est nilpotente, cela se voit en jordanisant et en travaillant dans chaque bloc.

Si elle est trigonalisable, cela se voit en utilisant la décomposition de Dunford et en travaillant séparément sur chaque espace caractéristique.

Si elle est quelconque, cela se voit en plongeant dans une clôture algébrique du corps et en utilisant le résultat suivant : pour $K \subset L$ une extension de corps, si deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(L)$, alors elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(K)$.

(Pour $\mathbb{R} = K \subset L = \mathbb{C}$, il existe $P = Q + iR$ inversible avec Q, R matrices réelles telles que $P^{-1}AP = B$. Pour toute valeur de $t \in \mathbb{R}$ sauf un nombre fini, la matrice réelle $Q + tR$ est inversible (car son déterminant est un polynôme réel en t qui est non nul pour $t = i$) et conjugue A en B . En général, c’est un peu plus délicat.)

(b) **Théorème de Jacobson-Morozov**

Proposition Soit E une matrice nilpotente $n \times n$. Il existe deux matrices H et F telles que

$$[H, E] = 2E, \quad [E, F] = H, \quad [H, F] = -2F.$$

Démonstration : Prenons l'espace vectoriel de dimension d des polynômes homogènes de degré $d-1$ en deux variables X et Y . Base : $(X^i Y^{d-i-1})_{i=0, \dots, d-1}$. Considérons les opérateurs

$$e = X \frac{\partial}{\partial Y}, \quad f = Y \frac{\partial}{\partial X}, \quad h = [e, f] = X \frac{\partial}{\partial X} - Y \frac{\partial}{\partial Y}.$$

Alors e est semblable à un bloc de Jordan $d \times d$, ce qui fournit (modulo changement de base) une réponse lorsque E est un bloc de Jordan.

Grâce au théorème de Jordan, le cas général s'en déduit.

Référence : Mneimné, l'orange ou le vert.

III Endomorphismes cycliques et matrices-compagnons

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique s'il existe un vecteur $x \in E$ tel que les images successives de x par u engendrent E , i.e. tel que $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E . Dans ce cas, il existe un unique n -uplet de scalaires $(a_0, \dots, a_{n-1})$ tel que

$$u^n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i u^i(x).$$

On note alors f le polynôme

$$f = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i;$$

la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est appelée matrice-compagnon de f :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = C_f = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On montre successivement les propriétés suivantes :

(a) *Le polynôme caractéristique de C_f est $\pm f$.* (Manipulations sur les lignes et les colonnes.)

(b) *Le polynôme minimal de C_f est f .* En effet, il divise f et aucun polynôme en u de degré $< n$ ne saurait annuler x .

(c) *Le commutant de u (de C_f) est l'algèbre des polynômes en u (en C_f).* En effet, l'image de x par un élément v du commutant de u peut s'exprimer (de façon unique) sous la forme $g(u)(x)$, où g est un polynôme de degré $< n$. En appliquant u^k pour $k = 1, \dots, n-1$, on constate que $v = g(u)$.

Réciproquement, on peut montrer que si u est tel que le commutant de u est l'algèbre des polynômes en u , alors u est cyclique. (Exercice.)

(d) *Si λ est une racine de f , l'espace propre correspondant de ${}^t C_f$ est de dimension 1 et engendré par ${}^t(1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})$.* Vérification immédiate. On en déduit tout aussi immédiatement :

(e) Si f est scindé à racines simples, alors u (ou C_f) est diagonalisable et :

$${}^tC_f = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1},$$

où $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_j^{i-1})_{i,j}$ est la matrice de Vandermonde et $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la matrice diagonale évidente. En fait, on a même (pourquoi ?) :

(f) La matrice C_f est diagonalisable SSI f est scindé à racines simples. On s'amusera à remarquer que la matrice de Vandermonde n'est plus inversible, exactement quand la matrice-compagnon n'est plus diagonalisable.

(g) Si $f = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, alors la décomposition de Jordan de C_f comporte r blocs, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ et de tailles respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Appliquer le lemme des noyaux pour séparer les espaces caractéristiques, ce qui donne des projecteurs $p_1, \dots, p_r$ de E sur chaque espace caractéristique, et vérifier que $(p_i(x), u(p_i(x)), \dots, u^{\alpha_i-1}(p_i(x)))$ en est une base.

(h) La matrice C_f a un seul invariant de similitude : f . Voir ci-dessous. (Puisque le $K[X]$ -module correspondant est $K[X]/(f)$, c'est bien naturel !)

(i) Ce qu'on peut ajouter pour obtenir un développement décent pour "Endomorphismes diagonalisables" –on se restreint au cas où $f(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$.

1. Interprétation de la transposée de la matrice de Vandermonde, $(\lambda_i^{j-1})_{i,j}$ comme matrice de passage de la base canonique de $K_n[X]$ à la base des polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$;
2. lien avec les suites récurrentes linéaires : à une suite $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, on associe la suite de vecteurs $X = (X_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (K^n)^{\mathbb{N}}$ définie par $X_k = {}^t(x_k, \dots, x_{k+n-1})$ ($k \in \mathbb{N}$). Alors x satisfait : $x_{k+n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{k+i} = 0$ ($k \in \mathbb{N}$) SSI X satisfait : $X_{k+1} = {}^tC_f X_k$ ($k \in \mathbb{N}$). La diagonalisation de tC_f donne une formule presque explicite pour x_k en fonction de k et $x_0, \dots, x_{n-1}$;
3. l'approche du même problème par série génératrice donne, en substance, une façon de calculer ${}^tV^{-1}$ en décomposant une fraction rationnelle ;
4. lien entre tC_f et les équations différentielles linéaires à coefficients constants ;
5. on s'attend alors à la question : *quid* si f n'est pas à racines simples...

IV Invariants de similitude

Références : [Debarre], [Serre], [Gourdon], [Tauvel].

1° La théorie "concrète"

Résumé préliminaire : Pour caractériser une matrice carrée à similitude près, on peut se donner une famille de polynômes (croissante pour la divisibilité). On a alors un représentant privilégié dans la classe de similitude, la matrice diagonale par blocs, dont les blocs sont les matrices-compagnons des polynômes en question. Idée : On cache la théorie des modules de type fini sur les anneaux principaux. C'est la même théorie que celle des groupes abéliens de type fini.

La théorie s'énonce en quatre propositions :

(a) Soit $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$. Il existe deux matrices $P(X), Q(X) \in GL_n(K[X])$ et des polynômes unitaires $f_1, \dots, f_n \in K[X]$, avec $f_1 | f_2 | \dots | f_n$, tels que

$$XI - A = P(X) \operatorname{diag}(f_1(X), \dots, f_n(X)) Q(X).$$

Idée de la preuve (constructive) : “algorithme de Gauss avec reste.”
Quitte à être lourd, on insiste : la preuve est algorithmique et peut s’implémenter sur machine.

Notons que les déterminants de $P(X)$ et $Q(X)$ sont inversibles dans $K[X]$, donc ce sont des scalaires. Par suite, le polynôme caractéristique de A est (au signe près) le produit $\prod_{i=1}^n f_i(X)$.

- (b) Avec les notations précédentes, les polynômes $f_1, \dots, f_n$ ne dépendent que de A .

Idée de la preuve (“rusé” mais facile) : D’une part, on introduit, pour $M(X) \in \text{Mat}_n(K[X])$, la notation $\Delta_i(M)$ pour le pgcd des mineurs $i \times i$ de M . On montre facilement que pour $M(X), P(X) \in \text{Mat}_n(K[X])$, $\Delta_i(M)$ divise $\Delta_i(PM)$ et $\Delta_i(MP)$, ce qui entraîne que pour $P(X), Q(X)$ inversibles, les Δ_i de $XI - A$ et de $P(X)(XI - A)Q(X)$ sont égaux (à scalaire près).

D’autre part, on vérifie que pour une matrice diagonale dont les coefficients successifs se divisent, le Δ_i est le produit des i coefficients diagonaux. On en tire : $f_i(X) = \Delta_i(XI - A) / \Delta_{i-1}(XI - A)$ (avec $\Delta_0 = 1$), ce qui ne dépend que de A .

- (c) Pour $A, B \in \text{Mat}_n(K)$ matrices scalaires, A et B sont semblables dans $\text{Mat}_n(K)$ SSI $XI - A$ et $XI - B$ sont équivalentes dans $\text{Mat}_n(K[X])$.

Idée de la preuve (délicate) : des divisions euclidiennes assez futées. Voir [Debarre].

- (d) Si les invariants de similitude de A sont $f_1, \dots, f_n \in K[X]$, alors A est semblable à $\text{diag}(C_{f_1}, \dots, C_{f_n})$ (on ignore les f_i constants).

Idée de la preuve (facile) : Il suffit de montrer que la matrice diagonale par blocs a bien ces invariants de similitude ; il suffit de traiter le cas d’une matrice-compagnon ; pour cela, les substitutions $L_{i-1} \rightarrow L_{i-1} + XL_i$, effectuées pour $i = n$ à $i = 1$, montrent que $-XI + C_f$ est équivalente, dans $\text{Mat}_n(K[X])$, à

$$C_f - XI \sim \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & f(X) \\ 1 & & (0) & * \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & 1 & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & f(X) \\ 1 & & (0) & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui permet de conclure aisément.

- (e) Résumé postliminaire : Ainsi, à toute matrice scalaire $A \in \text{Mat}_n(K)$, on sait, de façon algorithmique, associer une unique famille de polynômes unitaires $f_1 | f_2 | \cdots | f_n$. On convient de retirer de cette liste les polynômes constants : ceux qui restent sont appelés invariants de similitude de A . Ils ne dépendent que de la classe de similitude de A , et la caractérisent.

2° Applications et remarques

- (a) Pour commencer, on peut redémontrer le théorème de Jordan. En effet, pour A nilpotente, les invariants de similitude étant tous des diviseurs du polynôme caractéristique $\pm X^n$, ils sont de la forme $f_i(X) = X^{\ell_i}$. Mais la matrice-compagnon d’un tel polynôme est un bloc de Jordan, donc le point (d) donne l’existence d’une décomposition de Jordan. De plus, les tailles des blocs sont les degrés des invariants de similitude, donc ils sont uniques.

(b) Exercice : Calculer les invariants de similitude de la matrice-compagnon d'un polynôme scindé quelconque. Démontrer le théorème sur les invariants de similitude à partir du théorème de Jordan.

(c) Le calcul des invariants de similitude donne une méthode concrète pour calculer le polynôme minimal, qui n'est autre que le dernier invariant f_n . On peut donc savoir si la matrice est diagonalisable (critère : f_n scindé à racines simples sur K), ou, à défaut, semi-simple (critère : f_n scindé à racines simples sur une extension de K).

(d) Le calcul des invariants de similitude donne une méthode concrète (“algorithme de Gauss avec reste”), qui ne demande que des opérations linéaires (divisions euclidiennes, opérations sur les rangées d'une matrice), mais pas de résoudre des équations polynômiales.

A ce titre, les invariants de similitude donnent une réponse effective au problème de classification initial. Au contraire, la réduction de Jordan, fort utile en théorie, nécessite de résoudre des équations polynômiales, ce qui est difficile, et éventuellement de travailler dans des extensions de K .