Développement décimal de $1/p$ (d'après O. Mathieu)

CRDP Lyon, 27 septembre 2006

Jérôme Germoni (université Lyon 1)
Version longue, plus de preuves :
http://math.univ-lyon1.fr/∼germoni/besancon.pdf

Devinette

Devinette

Julian additionne deux nombres et trouve 999.
Combien de retenues a-t-il effectuées ?

Devinette

Devinette

Julian additionne deux nombres et trouve 999.
Combien de retenues a-t-il effectuées ?

Une réponse

Si Julian a calculé $142 + 857$, il n'a pas fait de retenue.

Devinette

Devinette

Julian additionne deux nombres et trouve 999.
Combien de retenues a-t-il effectuées ?

Une réponse

Si Julian a calculé $142 + 857$, il n'a pas fait de retenue.
Donc, par contrat didactique, la réponse est : aucune.

Introduction

$$\frac{1}{7} = 0{,}142\,857\;142\,857\;142\,857\;\ldots$$

- Développement cyclique.

Introduction

$$\frac{1}{7} = 0{,}142\,857\;142\,857\;142\,857\;\ldots$$

- Développement cyclique.
- Pas de demi-mesure :

$$142 + 857 = 999.$$

Introduction

$$\frac{1}{7} = 0{,}142\,857\;142\,857\;142\,857\;\ldots$$

- Développement cyclique.
- Pas de demi-mesure :

$$142 + 857 = 999.$$

- Silence, on tourne !

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\cdots, \quad \frac{2}{7} = 0{,}285714\cdots, \quad \frac{3}{7} = 0{,}428571\cdots,$$
$$\frac{4}{7} = 0{,}571428\cdots, \quad \frac{5}{7} = 0{,}714285\cdots, \quad \frac{6}{7} = 0{,}857142\cdots$$

Figures tutélaires

Suivant Gauss, *Disquisitiones arithmeticæ* (1801), on s'intéresse au développement décimal de $1/p$, où p est un nombre premier.

p-ème chiffre

$\frac{p+1}{2}$-ème chiffre

longueur $p-1$

Notation : nombres premiers : $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$.

Traduction de l'existence d'une période

Dire que le développement de $1/p$ est périodique de période d, c'est dire qu'il existe des chiffres $a_1, \ldots, a_d \in \{0, \ldots, 9\}$ tels que

$$\frac{1}{p} = \overline{0{,}\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_d}_{d}\,\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_d}_{d}\,\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_d}_{d} \cdots}.$$

Traduction de l'existence d'une période

Dire que le développement de $1/p$ est périodique de période d, c'est dire qu'il existe des chiffres $a_1, \ldots, a_d \in \{0, \ldots, 9\}$ tels que

$$\frac{1}{p} = \overline{0,\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_d}_{d}\,\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_d}_{d}\,\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_d}_{d} \cdots}.$$

Posons $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_d} = \sum_{i=1}^{d} a_i 10^{d-i}$, il vient :

$$10^d \times \frac{1}{p} = \overline{\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_d}_{d},\,\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_d}_{d} \cdots} = n + \frac{1}{p} \iff np = 10^d - 1.$$

Existence d'une période

$$\frac{1}{p} = \overline{0,\underbrace{\quad n}_{d}\underbrace{\quad n}_{d}\cdots} \iff np = 10^d - 1.$$

Existence d'une période

$$\frac{1}{p} = \overline{0,\underbrace{\quad n}_{d}\underbrace{\quad n}_{d}\cdots} \iff np = 10^d - 1.$$

Conséquence

- $d =$ longueur d'une période de $1/p \iff p$ divise $10^d - 1$;

Exemple : $p = 7$

- $10^6 - 1 = (10^3 + 1) \times (10^3 - 1) = 7 \times 11 \times 13 \times (10^3 - 1)$

Existence d'une période

$$\frac{1}{p} = \overline{0,\underbrace{\quad n}_{d}\underbrace{\quad n}_{d}\cdots} \iff np = 10^d - 1.$$

Conséquence

- $d =$ longueur d'une période de $1/p \iff p$ divise $10^d - 1$;
- période correspondante de $1/p$: $n = \dfrac{10^d - 1}{p} = \dfrac{99\cdots9}{p}$.

Exemple : $p = 7$

- $10^6 - 1 = (10^3 + 1) \times (10^3 - 1) = 7 \times 11 \times 13 \times (10^3 - 1)$
- $7 \times 142\,857 = 999\,999$.

Fermat et Lagrange

Petit théorème de Fermat

Pour tout $a \in \{1, \ldots, p-1\}$, p divise $a^{p-1} - 1$.

Conséquence (Lagrange)

- $p - 1$ est la longueur d'une période du développement de $1/p$;
- si d est la plus petite longueur possible, alors d divise $p - 1$.

Devinette

- Quel est le 53-ème chiffre de $1/53$?

Réponse

- C'est le même que le premier : 0.

Dichotomie (exemples)

Ici, on suppose que la plus courte période est de longueur paire.
On peut donc la couper en deux.

Dichotomie (exemples)

Ici, on suppose que la plus courte période est de longueur paire.
On peut donc la couper en deux.
Exemples :

- $\dfrac{1}{7} = 0,142\,857\cdots$
- $\dfrac{1}{13} = 0,076\,923\cdots$
- $\dfrac{1}{11} = 0,0\,9\cdots$

Dichotomie (exemples)

Ici, on suppose que la plus courte période est de longueur paire.
On peut donc la couper en deux.
Exemples :

- $\dfrac{1}{7} = 0,142\,857\cdots \;:\; 142 + 857 = 999$;
- $\dfrac{1}{13} = 0,076\,923\cdots \;:\; 76 + 923 = 999$;
- $\dfrac{1}{11} = 0,0\,9\cdots \;:\; 0 + 9 = 9\ldots$

Ca ne saurait être un hasard !

Dichotomie (formalisation)

Lemme

Supposons que $d = 2e$ soit une longueur de période de $1/p$, mais que e ne soit pas la longueur d'une période :

$$\frac{1}{p} = \overline{0,\underbrace{\underbrace{A}_{e}\underbrace{B}_{e}}_{d=2e}\underbrace{\underbrace{A}_{e}\underbrace{B}_{e}}_{d=2e}}\cdots, \qquad 0 \leq A, B < 10^e.$$

Alors,

$$A + B = 10^e - 1 = \underbrace{99\cdots9}_{e \text{ chiffres}}.$$

Preuve

$$\frac{1}{p} = \overline{0,\underbrace{\quad A}_{e}\underbrace{\quad B}_{e}\underbrace{\quad A}_{e}\underbrace{\quad B}_{e}\cdots}, \quad 0 \leq A, B < 10^e$$

permet d'écrire

$$\frac{10^{2e}}{p} = 10^e A + B + \frac{1}{p},$$

puis

$$\frac{10^e + 1}{p} \times (10^e - 1) = 10^e A + B.$$

Modulo $10^e - 1$, il vient :

$$A + B \equiv 0 \; [10^e - 1] \quad \text{et} \quad 1 \leq A + B < 2(10^e - 1).$$

Un énoncé surprenant

Théorème (O. Mathieu ?)

Soit $p \geq 11$ un nombre premier :

1. la $(p+1)/2$-ème décimale de $1/p$ est 0 ou 9 ;
2. le fait que ce soit 0 ou 9 ne dépend que de p modulo 40.

$$\frac{1}{p} = 0,\underbrace{\underbrace{\qquad\qquad}_{e}\overset{\downarrow}{\underbrace{\qquad\qquad}_{e}}}_{p-1=2e}\cdots$$

Preuve (premier point)

1. Partie facile.

$$\frac{1}{p} = 0,\underbrace{\underbrace{\quad A}_{e}\overset{\downarrow}{}\underbrace{\quad B}_{e}}_{p-1=2e}\cdots, \quad \begin{cases} A = B \\ \quad ou \\ A + B = 99\cdots 9. \end{cases}$$

Preuve (premier point)

1. Partie facile.

$$\frac{1}{p} = 0,\underbrace{\underbrace{\overset{\downarrow}{0} \qquad A}_{e}\overset{\downarrow}{\vphantom{A}}\underbrace{\qquad\quad B}_{e}}_{p-1=2e}\cdots, \qquad \left\{\begin{array}{l} A = B \\ \quad ou \\ A + B = 99\cdots9. \end{array}\right.$$

- Cas $A = B$: c'est 0.
- Cas $A + B = 99\cdots9$: c'est 9. En effet :

$$\begin{array}{r} 0\ \bullet\ \cdots\ \bullet\ \bullet \\ +\ ?\ \bullet\ \cdots\ \bullet\ \bullet \\ \hline 9\ 9\ \cdots\ 9\ 9 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} A \\ +\ B \\ \hline 10^{p-1} - 1 \end{array}$$

Esquisse de preuve (deuxième point)

2. Il faut décider si $\frac{p-1}{2}$ est une période, i.e. si p divise $10^{\frac{p-1}{2}} - 1$.

Fermat et Gauss : p divise $10^{\frac{p-1}{2}} - 1$ ou $10^{\frac{p-1}{2}} + 1$.

Notation

Pour p premier et $a \in \mathbb{Z}$, $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \mod p \in \{-1, 1, 0\}$

Exemple (non trivial)

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \pm 1 \ [8] \\ -1 & \text{si } p = \pm 3 \ [8]. \end{cases}$$

Ce symbole ne dépend donc que de p modulo 8.

Loi de réciprocité quadratique

Théorème (Gauss – 1801)

Soit p, q premiers impairs distincts. Alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Loi de réciprocité quadratique

Théorème (Gauss – 1801)

Soit p, q premiers impairs distincts. Alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Application au $(p+1)/2$-ème chiffre : 0 ou 9 ?

La $\frac{p+1}{2}$-ème décimale de $1/p$ est 0 SSI $\left(\frac{10}{p}\right) = 10^{\frac{p-1}{2}} = 1\ [p]$. Or...

$$\left(\frac{10}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{p}{5}\right).$$

Par le lemme chinois, ceci ne dépend que de p modulo 40.

Exemples

Le 7^{eme} chiffre de $\frac{1}{13}$ est le même que le 27^{eme} chiffre de $\frac{1}{53}$:

$$\frac{1}{13} = 0{,}076923\,\mathbf{0}76923\cdots$$

$$\frac{1}{53} = 0{,}0188679245283\ 0188679245283\ \mathbf{0}0188\cdots$$

Le 16^{eme} chiffre de $\frac{1}{31}$ est le même que le 36ème chiffre de $\frac{1}{71}$:

$$\frac{1}{31} = 0{,}032258064516129\ \mathbf{0}32258064516129\ 032258064516129\cdots$$

$$\frac{1}{71} = 0{,}01408450704225352112676056338028169\ \mathbf{0}14084507042\cdots$$

Occuper Julian (8 ans) à la pizzeria

$$1 \times 142857 = 142857,$$
$$2 \times 142857 = 285714,$$
$$3 \times 142857 = 428571,$$
$$4 \times 142857 = 571428,$$
$$5 \times 142857 = 714285,$$
$$6 \times 142857 = 857142$$

Occuper Julian (11 ans) à la pizzeria

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\cdots, \quad \frac{2}{7} = 0{,}285714\cdots, \quad \frac{3}{7} = 0{,}428571\cdots,$$
$$\frac{4}{7} = 0{,}571428\cdots, \quad \frac{5}{7} = 0{,}714285\cdots, \quad \frac{6}{7} = 0{,}857142\cdots$$

Que faire à la pizzeria quand Julian aura 13 ans ?

Que faire à la pizzeria quand Julian aura 13 ans ?

$$\frac{1}{13} = 0{,}076923\cdots, \quad \frac{2}{13} = 0{,}153846\cdots, \quad \frac{3}{13} = 0{,}230769\cdots,$$
$$\frac{4}{13} = 0{,}307692\cdots, \quad \frac{5}{13} = 0{,}384615\cdots, \quad \frac{6}{13} = 0{,}461538\cdots$$
$$\frac{7}{13} = 0{,}538461\cdots, \quad \frac{8}{13} = 0{,}615384\cdots, \quad \frac{9}{13} = 0{,}692307\cdots$$
$$\frac{10}{13} = 0{,}769230\cdots, \quad \frac{11}{13} = 0{,}846153\cdots, \quad \frac{12}{13} = 0{,}923076\cdots$$

Que faire à la pizzeria quand Julian aura 13 ans ?

$$\frac{1}{13} = 0{,}076923\cdots , \quad \frac{2}{13} = 0{,}153846\cdots , \quad \frac{3}{13} = 0{,}230769\cdots ,$$
$$\frac{4}{13} = 0{,}307692\cdots , \quad \frac{5}{13} = 0{,}384615\cdots , \quad \frac{6}{13} = 0{,}461538\cdots$$
$$\frac{7}{13} = 0{,}538461\cdots , \quad \frac{8}{13} = 0{,}615384\cdots , \quad \frac{9}{13} = 0{,}692307\cdots$$
$$\frac{10}{13} = 0{,}769230\cdots , \quad \frac{11}{13} = 0{,}846153\cdots , \quad \frac{12}{13} = 0{,}923076\cdots$$

Pour $\frac{1}{13}$: nombre de périodes : 2, longueur des périodes : 6.

Proposition

$$\left(\begin{array}{c} \text{nombre de périodes de } k/p \\ (1 \leq k \leq p-1) \\ \text{à permutation cyclique près} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{longueur minimale} \\ \text{d'une période} \end{array} \right) = p-1$$

Question

Pour quels nombres premiers a-t-on

- la longueur minimale des périodes égale à $p-1$?
- une seule période (à permutation cyclique près) pour tous les k/p, $1 \leq k \leq p-1$;

(Les deux conditions sont équivalentes !)

Deux types de nombres premiers

Base 10 : pour un nombre premier p, deux cas :

- longueur minimale période $= p - 1$; ex. : $\frac{1}{7} = 0,142857\cdots$;
- longueur minimale période $< p - 1$; ex. : $\frac{1}{13} = 0,076923\cdots$.

Problème

On note

$$\mathcal{P}(10) = \{p \text{ premier: longueur minimale période} = p - 1\}.$$

Deux types de nombres premiers

Base 10 : pour un nombre premier p, deux cas :

- longueur minimale période $= p-1$; ex. : $\dfrac{1}{7} = 0,142857\cdots$;
- longueur minimale période $< p-1$; ex. : $\dfrac{1}{13} = 0,076923\cdots$.

Problème

On note

$$\mathcal{P}(10) = \{p \text{ premier: longueur minimale période} = p-1\}.$$

Est-ce que $\mathcal{P}(10)$ est infini ? Estimer la "densité" de $\mathcal{P}_{10}$:

$$d_{10}(x) = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}} \quad : \quad \lim_{x \to +\infty} d_{10}(x) \ ?$$

Expériences numériques

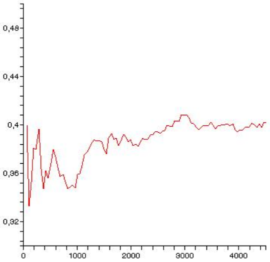
$$\mathcal{P}(10) = \{7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, \ldots\}$$

$$y = d_{10}(x) = \frac{\operatorname{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\operatorname{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$

Expériences numériques

$$\mathcal{P}(10) = \{7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, \ldots\}$$

$$y = d_{10}(x) = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$



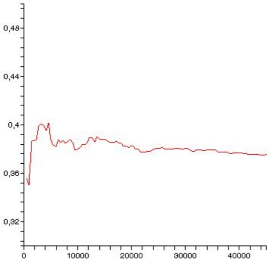
base 10

$x_{\mathrm{max}} = 4500$

Expériences numériques

$$\mathcal{P}(10) = \{7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, \dots\}$$

$$y = d_{10}(x) = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$



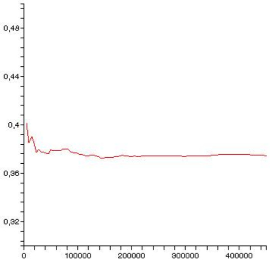
base 10

$x_{\max} = 45000$

Expériences numériques

$$\mathcal{P}(10) = \{7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, \dots\}$$

$$y = d_{10}(x) = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$



base 10

$x_{\max} = 450000$

Enoncé de la conjecture (base 10)

Conjecture

- *Il existe un nombre infini de nombres premiers p tels que la plus petite période décimale de $1/p$ soit de longueur $p-1$.*
- *La densité de ces p est :*

$$C_{\text{Artin}} = \prod_{q \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{q(q-1)}\right) \simeq 0{,}373\,955\,813\,6\ldots$$

Remarque : où intervient 10 ?

Enoncé de la conjecture (base presque quelconque)

Conjecture

- *Il existe un nombre infini de nombres premiers p tels que la plus petite période en base ℓ de $1/p$ soit de longueur $p-1$.*
- *La densité de ces p est :*

$$C_{\text{Artin}} = \prod_{q \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{q(q-1)}\right) \simeq 0{,}373\,955\,813\,6\ldots$$

Remarque : où intervient 10 ?
On peut remplacer 10 par (presque) n'importe quelle base ℓ.

Résultats partiels

La conjecture est toujours ouverte, mais on sait :

- *avec l'hypothèse de Riemann généralisée* (version quantitative) : la conjecture d'Artin est vraie ;
- *résultats inconditionnels* (version qualitative) : au plus deux exceptions parmi les bases $\ell \in \mathcal{P}$;
  par exemple, une infinité de $1/p$ ont une période de longueur minimale $p-1$ en base 2, 3 ou 5.

C'est fini.

Quelques jeux supplémentaires ?

Algorithme de division

$$\begin{array}{r|l} 999\,999 & 7 \\ \hline & \end{array}$$

Algorithme de division

$$\begin{array}{r|r}
999\,999 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{49} & 7 \\
95 &
\end{array}$$

Algorithme de division

$$\begin{array}{r|r} 999\,999 & 7 \\ \hline \underline{49} & 57 \\ 95 & \\ \underline{35} & \\ 9\,6 & \end{array}$$

Algorithme de division

$$
\begin{array}{r|r}
999\,999 & 7 \qquad\qquad \\ \cline{2-2}
\underline{49} & 857 \\
95 & \\
\underline{35} & \\
9\,6 & \\
\underline{5\,6} & \\
94 &
\end{array}
$$

Algorithme de division

$$
\begin{array}{r|l}
999\,999 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{49} & \quad 2\,857 \\
95 & \\
\underline{35} & \\
9\,6 & \\
\underline{5\,6} & \\
94 & \\
\underline{14} & \\
98 &
\end{array}
$$

Algorithme de division

999 999	7
$\underline{49}$	42 857
95	
$\underline{35}$	
9 6	
$\underline{5\ 6}$	
94	
$\underline{14}$	
98	
$\underline{28}$	
7	

Algorithme de division

$$\begin{array}{cccccc|l}
9&9&9&9&9&9&7\\ \cline{7-7}
&&&&\underline{4}&\underline{9}&142\,857\\
&&&9&5&&\\
&&&\underline{3}&\underline{5}&&\\
&&9&6&&&\\
&&\underline{5}&\underline{6}&&&\\
&9&4&&&&\\
&\underline{1}&\underline{4}&&&&\\
9&8&&&&&\\
\underline{2}&\underline{8}&&&&&\\
7&&&&&&\\
\underline{7}&&&&&&\\
0&&&&&&
\end{array}$$

Le $p-1$-ème chiffre

Devinette

2. Quel est le 52-ème chiffre de $1/53$?

Réponse

2. C'est 3, car $3 \times 3 = 9$.

$$\begin{array}{l|l} 99\cdots9\,999 & 53 \\ \hline & \end{array}$$

Le $p-1$-ème chiffre

Devinette

2. Quel est le 52-ème chiffre de $1/53$?

Réponse

2. C'est 3, car $3 \times 3 = 9$.

$$\begin{array}{r|l} 99\cdots 9\,999 & 53 \\ \cline{2-2} \underline{159} & \qquad\quad 3 \\ 84 & \end{array}$$

Le $p-1$-ème chiffre

Devinette

2. Quel est le 52-ème chiffre de $1/53$?

Réponse

2. C'est 3, car $3 \times 3 = 9$.

$$\begin{array}{r|l} 99\cdots 9\,999 & 53 \\ \cline{2-2} \underline{159} & \quad\quad \cdots 3 \\ 84 & \\ \cdots & \end{array}$$

Découpage de période en 3, 4 et plus

Maitrisant la dichotomie, tentons de diviser plus !

Exemples :

- $\frac{1}{7} = 0,142\ 857\cdots$
- $\frac{1}{7} = 0,14\ 28\ 57\cdots$
- $\frac{1}{13} = 0,07\ 69\ 23\cdots$

Contre-exemple :

- $\frac{1}{73} = 0{,}01\ 36\ 98\ 63\cdots$

Découpage de période en 3, 4 et plus

Maitrisant la dichotomie, tentons de diviser plus !

Exemples (généraliser) :

- $\frac{1}{7} = 0,142\,857\cdots\ :\ 142 + 857 = 999$;
- $\frac{1}{7} = 0,14\,28\,57\cdots\ :\ 14 + 28 + 57 = 99$;
- $\frac{1}{13} = 0,07\,69\,23\cdots\ :\ 7 + 69 + 23 = 99.$

Contre-exemple (trouver un énoncé quand même) :

- $\frac{1}{73} = 0{,}01\,36\,98\,63\cdots\ :\ 1 + 36 + 98 + 63 = 2 \times 99.$

Calcul exotique de $1/13$

$$\frac{1}{13} = 0, \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \cdots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 | (10^6 - 1) = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$

Calcul exotique de 1/13

$$\frac{1}{13} = 0,0 \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \cdots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 | (10^6 - 1) = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$
- $13 > 10$

Calcul exotique de $1/13$

$$\frac{1}{13} = 0,0 \bullet \bullet \bullet \bullet 3 \cdots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 | (10^6 - 1) = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$
- $13 > 10$
- $3 \times 3 = 9$

Calcul exotique de $1/13$

$$\frac{1}{13} = 0,0\bullet 6\,9\bullet 3\cdots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13|(10^6-1) = (10^3+1)(10^3-1)$
- $13 > 10$
- $3 \times 3 = 9$
- $$\begin{array}{r} 0\bullet\bullet \\ +\ \bullet\bullet 3 \\ \hline 9\,9\,9 \end{array}$$

Calcul exotique de 1/13

$$\frac{1}{13} = 0,076\,923\cdots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 | (10^6 - 1) = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$
- $13 > 10$
- $3 \times 3 = 9$
- $$\begin{array}{rccc} & 0 & \bullet & \bullet \\ + & \bullet & \bullet & 3 \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array}$$
- $$\begin{array}{rcc} & 0 & \bullet \\ + & 6 & 9 \\ + & \bullet & 3 \\ \hline & 9 & 9 \end{array}$$

Ceci n'est pas une preuve

$$\langle a \rangle = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \iff \forall q \text{ premier : } \; p \equiv 1 \; [q], \; a^{\frac{p-1}{q}} \neq 1 \; [p]$$

- Fixons q :
  - probabilité pour que $p = 1 \; [q]$: $\dfrac{1}{q-1}$;
  - probabilité pour que $a^{\frac{p-1}{q}} = 1 \; [p]$: $\dfrac{1}{q}$.

  Probabilité pour que “ça marche” pour q : $1 - \dfrac{1}{q(q-1)}$.
- Si indépendance, probabilité pour que “ça marche” pour tous les q :

$$\prod_q \left(1 - \frac{1}{q(q-1)}\right).$$

Références

Théorèmes de Fermat, Lagrange, etc.

D. Guin, *Algèbre*, Ed. Belin (par exemple)

Réciprocité quadratique et autres merveilles

J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, PUF ou en anglais chez Springer

Conjecture d'Artin

- http://en.wikipedia.org/wiki/Artin_conjecture_(primitive_roots)
- P. Moree, *Artin's primitive root conjecture -a survey -*, http://arxiv.org/abs/math/0412262 (le début est raisonnable)