Matrices à signes alternants et groupe quantique $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ Errata

Adrien Dauphin

Juin 2012 – février 2017

Le mémoire d'Adrien Dauphin détaille la preuve donnée par Greg Kuperberg de la formule donnant le nombre de matrices à signes alternants (démontrée par Doron Zeilberger). Surtout, il retrace l'origine des calculs miraculeux de Kuperberg sur les R-matrices jusqu'aux représentations de $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ d'où elles proviennent (mais Kuperberg n'en fait pas mention. Cette idée a été communiquée par Kenji Iohara à Jérôme Germoni qui encadrait le stage.

Outre quelques fautes de frappe anodines, il reste une erreur plus importante dans la proposition 3.11 – par ma faute (JG).

Errata

lemme 2.7 lire $Z_{n-1}(X \setminus \{x_i\}, Y \setminus \{y_j\})$ (et pas y_i) ;

p.14, preuve de 3.4 remplacer $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ par $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ (deux fois) ;

définition 3.7 il manque la relation $[K_i, K_j] = 0$ pour tous i et j ;

proposition 3.11 et preuve l'énoncé est incomplet et la preuve trop rapide (voir plus bas) ;

p. 24, après la définition 4.1 le nombre de coefficients nuls, correspondant aux sommets de type 3 à 6, est $n^2 - n - 2k$;

Proposition 3.11 et preuve

Proposition. *Soient w et z des complexes non nuls. Alors,*

$$V(w) \otimes V(z) \text{ est irréductible } \iff zw^{-1} \neq q^{\pm 2}.$$

Le mémoire donnait seulement la condition $zw^{-1} \neq q^2$.

On note :

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1 \cdot (v_+ \otimes v_+) = v_+ \otimes v_- + q^{-1} v_- \otimes v_+, \\ w_0 &= e_0 \cdot (v_+ \otimes v_+) = zq^{-1} v_+ \otimes v_- + w v_- \otimes v_+, \\ w_2 &= v_+ \otimes v_- - q v_- \otimes v_+. \end{aligned}$$

Rappelons que pour la sous-algèbre $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ engendrée par $K_1^{\pm 1}$, e_1 et f_1, les sous-espaces

$$\begin{aligned} L(2) &= \mathbb{C}(v_+ \otimes v_+) \oplus \mathbb{C} w_1 \oplus \mathbb{C}(v_- \otimes v_-), \\ L(0) &= \mathbb{C} w_2 \end{aligned}$$

sont des sous-modules et, au moins lorsque [1] $q^2 \neq -1$, ils sont supplémentaires. Pour que $L(2)$ soit un sous-$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$-module, il est nécessaire et suffisant que w_0 et w_1 soient colinéaires, ce qui conduit à la condition $zw^{-1} = q^2$. Mais... dans ce cas, $V(w) \otimes V(z)$ est une extension *non scindée* de $L(2)$ par $L(0)$!

Il peut également arriver que $L(0)$ soit stable par $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$, exactement lorsque $e_0 \cdot w_2 = 0 = f_0 \cdot w_2$, ce qui équivaut à $zw^{-1} = q^{-2}$. Dans ce cas, $V(w) \otimes V(z)$ est une extention non scindée de $L(0)$ par $L(2)$.

Autrement dit, deux raisons peuvent faire que $V(w) \otimes V(z)$ n'est pas irréductible :

— soit $zw^{-1} = q^2$, alors $V(w) \otimes V(z)$ contient un sous-module $L(2)$ de dimension 3 ;

— soit $zw^{-1} = q^{-2}$, alors $V(w) \otimes V(z)$ contient un sous-module $L(0)$ de dimension 1 ;

dans les deux cas, l'extension n'est pas scindée, c'est-à-dire que le sous-module n'admet pas de sous-module supplémentaire.

1. Si $q + q^{-1} = 0$, les vecteurs w_0 et w_2 sont colinéaires.