SOMMAIRE

Introduction :

Ce mémoire est centré sur la formule du triple produit de Jacobi (TPJ), et sur plusieurs applications à la combinatoire des partitions et à l'arithmétique.
On retrouve le TPJ dans de nombreuses preuves, il est en effet très pratique car il a pour but de transformer des sommes infinies en produits infinis, ce qui en facilite la manipulation et permet des calculs plus aisés.

Plus précisément :

- Dans une première partie on introduit les q-séries pour définir la formule de Taylor « quantique » d'une série entière convergente.
  On démontre 2 identités d'Euler qui sont des applications des q-formules de Taylor de fonctions qu'on va rencontrer régulièrement.

- Les identités d'Euler vont nous permettre dans une seconde partie de donner des preuves raisonnablement courtes et claires du TPJ .
  Et nous en donnerons une dernière vraiment courte due à Cauchy.

- Le TPJ a des applications dans de nombreux domaines mathématiques, en particulier en combinatoire, on va voir qu'il est utile à l'étude des partitions. On va introduire les nombres triangulaires et pentagonaux qui interviennent dans des formules de partitions.
  Ces égalités nous permettrons de donner une preuve de la congruence de Ramanujan [He]:
  $$p(5n+4) \equiv 0[\text{mod } 5]$$
  Cette preuve utilise essentiellement des outils d'algèbre linaire.

- On donnera dans une dernière partie une preuve raisonnablement courte du théorème des deux carrés par Hirschhorn [H] basée elle aussi sur le TPJ .

Enfin on donnera : - une preuve du théorème des quatre carrés due à Duverney [D], preuve qui utilise l’équation de la chaleur et le TPJ pour retrouver le carré de l’expression du théorème des deux carrés.

- et une autre incompréhensible de Andrews, Ekhad et Zeilberger [AEZ].

I q-séries

Dans cette partie on introduit les q-séries pour donner la q-formule de Taylor pour les séries entières convergentes :

I-1 q-derivée et formule de Taylor

Soit $q \in \mathbb{C},\ q \neq 1$ fixé.

On introduit pour une fonction ou série formelle $f(x)$ sa q-dérivée $D_q f(x)$ telle que :

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x},\ \text{pour } q \neq 1$$

Si f est différentiable alors : $\lim\limits_{q \to 1} D_q f(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$

D_q est linéaire : pour tout a, b constants et f, g fonctions on a:

$$D_q(af(x) + bg(x)) = aD_q(f(x)) + bD_q(g(x))$$

Pour un produit de fonctions $f(x)g(x)$ on a :

$$\begin{aligned} D_q(f(x)g(x)) &= \frac{f(qx)g(qx) - f(x)g(x)}{(q-1)x} \\ &= \frac{f(qx)g(qx) - g(qx)f(x) + g(qx)f(x) - f(x)g(x)}{(q-1)x} \\ &= \frac{g(qx)[f(qx) - f(x)] - f(x)[g(qx) - g(x)]}{(q-1)x} \end{aligned}$$

$$D_q(f(x)g(x)) = g(qx)D_q f(x) + f(x)D_q g(x) \qquad (1)$$

Et on a aussi en échangeant f et g :

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x) \qquad (2)$$

Pour un quotient de fonctions $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, avec g non nulle quel que soit x en appliquant les formules du produit à $g \times \dfrac{f}{g} = f$,

Nous obtenons :

avec (1) : $$\left(\frac{f(qx)}{g(qx)}\right)D_q \mathrm{g}(\mathrm{x}) + g(x)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = D_q f(x)$$

D'où : $$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D_q f(x) - \left(\frac{f(qx)}{g(qx)}\right)D_q g(x)}{g(x)} = \frac{g(qx)D_q f(x) - f(qx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}$$

De même, avec (2) : $$\mathrm{g}(qx)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) + \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)D_q g(x) = D_q f(x)$$

D'où $$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D_q f(x) - \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)D_q g(x)}{g(qx)} = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}$$

Nous voulons formuler le développement de Taylor d'une fonction avec ses q-dérivées : $D_q^n f(x)$.
Remarquons que si D est la dérivée usuelle elle est « très adaptée » à la famille $P_n = \dfrac{X^n}{n!}$.
Plus précisément, on peut exprimer la formule de Taylor de la façon suivante :

Proposition 1 :

Sur l'espace des polynômes $C[X]$, soient D un endomorphisme linéaire, $(P_i)_{i\in \mathrm{N}}$ une famille de polynômes et $a \in C$ tels que :

1. $P_0(a) = 1$ *et* $P_n(a) = 0$ *pour tout* $n \geq 1$
2. $DegP_n = n$
3. $DP_n(x) = P_{n-1}(x)$ *pour tout* $n \geq 1$ *et* $D(1) = 0$

Alors pour tout $f(x) \in C[X]$ de degré N, on a : $f(x) = \sum_{n=0}^{N} (D^n f)(a)P_n(x).$

Cette proposition se démontre par une récurrence immédiate. Or pour l'opérateur linéaire D_q et la famille de polynômes $P_n = \frac{X^n}{n!}$, famille habituelle avec la dérivée usuelle D, la condition 3) n'est pas vérifiée, en effet pour $a \neq 0$ on a :

$$D_q(x-a)^2 = \frac{(qx-a)^2-(x-a)^2}{(q-1)x} = \frac{q^2x^2-2qxa+a^2-x^2+2ax-a^2}{(q-1)x}$$

$$= \frac{(q^2-1)x-(q-1)2ax}{(q-1)x}$$

$$D_q(x-a)^2 = (q+1)x-2a$$

Et $$(q+1)x-2a \neq [2](x-a) = (q+1)(x-a)$$

D'où $$D_q\frac{(x-a)^2}{[2]!} \neq (x-a)$$

Cherchons une famille $P_n(x)$ adaptée à l'opérateur D_q pour pouvoir appliquer la proposition 1 :

Nous devons avoir : $P_0(x) = 1$

D'où $D_qP_1(x) = P_0(x) = 1 \quad et \; P_1(a) = 0$

Nous devons donc avoir $P_1(x) = x-a$

De plus nous devons avoir $D_qP_2(x) = P_1(x) = x-a \quad et \quad P_2(a) = 0$

Nous devons donc avoir $P_2(x) = \frac{x^2}{[2]} - ax + c \quad avec \; c = P_2(a) - \frac{a^2}{[2]} + a^2$

D'où $c = -\frac{a^2}{[2]} + a^2$

De sorte que : $$P_2(x) = \frac{x^2}{[2]} - ax - \frac{a^2}{[2]} + a^2$$

$$P_2(x) = \frac{(x-a)(x-qa)}{[2]}$$

De même on trouve :

$$P_3(x) = \frac{x^3}{[3]!} - \frac{ax^2}{[2]} + \left[a^2 - \frac{a^2}{[2]}\right]x + c \text{, avec } c = -\frac{a^3}{[3]!} - a^3 + \frac{2}{[2]}a^3$$

Et donc $$P_3(x)=\frac{x^3-[3]ax^2+([3]!a^2-[3]a^2)x-a^3-[3]!a^3+2[3]a^3}{[3]!}$$

$$=\frac{x^3-[3]ax^2+[3]a^2qx-a^3-[3]a^3(1-q)}{[3]!}$$

$$=\frac{x^3-(q^2+q+1)ax^2+(q^2+q+1)a^2qx+a^3\left(-1+1-q^3\right)}{[3]!}$$

$$=\frac{x^3-(q^2+q+1)ax^2+(q^2+q+1)a^2qx-q^3a^3}{[3]!}$$

$$P_3(x)=\frac{(x-a)(x-qa)(x-q^2a)}{[3]!}$$

Ces exemples suggèrent de définir les polynômes suivants :

$$P_n(x)=\prod_{i=0}^{n-1}\frac{\left(x-q^ia\right)}{[i+1]!}=\frac{1}{[n]!}\prod_{i=0}^{n-1}\left(x-q^ia\right)$$

Que l'on note : $$(x-a)_q^n:=\frac{1}{[n]!}\prod_{i=0}^{n-1}\left(x-q^ia\right)$$

On en déduit le lemme suivant :

Lemme 1*:* *On a* $D_q(x-a)_q^n=[n](x-a)_q^{n-1}$

En effet les fonctions ainsi introduites vérifient la condition 3) de la proposition1:

Preuve :

$$D_q(x-a)_q^n=\frac{(qx-a)(qx-qa)\ldots(qx-q^{n-1}a)-(x-a)\ldots(x-q^{n-1}a)}{(q-1)x}$$

$$=\frac{1}{(q-1)x}\times\left[(qx-a)q^{n-1}(x-a)(x-aq)\ldots(x-q^{n-2}a)-(x-a)(x-qa)\ldots(x-q^{n-1}a)\right]$$

$$=\frac{1}{(q-1)x}\times\left[(qx-a)q^{n-1}(x-a)_q^{n-1}-(x-a)_q^{n-1}(x-q^{n-1}a)\right]$$

$$=\frac{(x-a)_q^{n-1}}{(q-1)x}\times\left[q^nx-aq^{n-1}-x+q^{n-1}a\right]$$

$$= \frac{(q^n - 1)x}{(q-1)x} \times (x-a)_q^{n-1}$$

$$D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}$$

Et elles vérifient aussi les conditions 1) et 2).

Avec les fonctions $P_n(x)$ nous obtenons la formule de Taylor suivante :

Proposition 2 : *Pour tout polynôme* $f(x)$ *:* $f(x) = \sum_{j=0}^{N} (D_q^j f)(a) \frac{(x-a)_q^j}{[j]!}$.

Exemple : q-binôme de Newton

Pour $f(x) = (x+a)_q^n$, on remplace a par (-a) dans $D_q(x-a)_q^n$

On obtient donc : $D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}$

D'où $\left(D_q^j (x-a)_q^n\right)(0) = \left([n][n+1]\ldots[n-j+1]\right) q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}} a^{n-j} x^j$

En posant $j \to (n-j)$:

On obtient : $$\boxed{(x-a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{j(j-1)}{2}} a^j x^{n-j}}$$

En remplaçant x par 1 et a par x nous trouvons :

$$(1+x)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{j(j-1)}{2}} x^j \qquad (*)$$

I-2 Passage des polynômes aux séries formelles :

Notons $\mathbb{C}[[X]]$ l'ensemble des séries formelles. Soit f appartenant à $\mathbb{C}[[X]]$, f est défini par la suite $(a_k)_{k\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que : $f(x)=\sum_{k\geq 0}^{\infty} a_k X^k, X \in \mathbb{C}$.

L'ensemble des polynômes à coefficients complexes est inclus dans l'ensemble des séries formelles. Un polynôme à coefficients complexes est en effet une suite nulle à partir d'un certain rang.

Par définition nous avons : $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$ équivaut à $a_k = b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Les séries formelles sont naturellement un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$:

Si $f, g \in \mathbb{C}[[X]]$: $\quad f+g=\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k+b_k) X^k$

Le neutre pour l'addition est la série constante nulle.

Et pour $\lambda \in \mathbb{C}$: $\quad \lambda f = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) X^k$

Soient $f, g \in \mathbb{C}[[X]]$, $\quad f(X) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k, \quad g(X) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$

On définit le produit sur $\mathbb{C}[[X]]$ de deux séries comme suit :

$$(fg)(X) := \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m+l=k} a_m b_l\right) X^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}\right) X^k$$

Ce produit est associatif, cela découle de l'associativité de $\mathbb{C}[X]$, distributif.
Le neutre est la série de terme constant égal à 1 et avec tout les autres coefficients nuls.

Remarque : -L'ensemble des polynômes est un sous-anneau $\mathbb{C}[X]$ de $\mathbb{C}[[X]]$.
On obtient donc la formule pour les séries formelles :

q-formule de Taylor formelle :

Proposition 3 : *Si* $f \in \mathbb{C}[[X]]$ *, alors :* $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(D_q^n f)(0)}{[k]!} X^n$ *, q fixé, q* $\in \mathbb{C}$

<u>Preuve</u> : En effet : Si $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n X^n$, $C_n \in \mathbb{C}$

Alors $$(D_q f)(X) = \frac{f(qX) - f(X)}{(q-1)X} = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \frac{(q^n - 1)}{(q-1)} \frac{X^n}{X}$$

$$(D_q f)(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n [n] X^{n-1}$$

Et : $$(D_q^{(2)} f)(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n [n] \frac{(q^{n-1} - 1)}{(q-1)} \frac{X^{n-1}}{X}$$

$$(D_q^{(2)} f)(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} C_n [n][n-1] X^{n-2}$$

On a la formule $$(D_q^{(p)} f)(X) = \sum_{n=p}^{+\infty} C_n [n][n-1]\ldots[n-p+1] X^{n-p}$$

D'où : $$(D_q^{(p)} f)(0) = \sum_{n=p}^{+\infty} C_n [n][n-1]\ldots[n-p+1]$$

$$(D_q^{(p)} f)(0) = C_p [p][p-1]\ldots[1] = C_p ([p]!)$$

D'où : $$f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(D_q^n f)(0)}{[k]!} X^n \quad .$$

I-3 Séries convergentes :

I-3-1 Rayon de convergence :

Soit $f \in \mathbb{C}[[X]]$ $f(x)=\sum_{k\geq 0}^{\infty} a_k X^k$ avec $a_k \in \mathbb{C}$ pour tout k.

Pour z nul, f converge quelque soit la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $a_k \in \mathbb{C}$ pour tout k.

Posons $R=\sup\left\{r\geq 0 : (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite bornée}\right\}$

Lemme d'Abel : *Si* $r<R$ *alors* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge normalement dans* $\overline{D(0,r)}$.

Si $r>R$ *alors* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *diverge dans* $\overline{D(0,r)}$.

<u>*Preuve*</u> :

Soit $r<R$, on fixe $z\in\overline{D(0,r)}$ et $r'\in\left]r,R\right[$. On a : $\forall n\in\mathbb{N} : |a_n| z^n \leq |a_n| r^n$,

Et $|a_n| r^n = |a_n| r'^n \times \left(\frac{r}{r'}\right)^n$, $|a_n| r'^n$ est bornée car $r<r'$ et $\left(\frac{r}{r'}\right)^n$ est le terme général d'une série convergente. Donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D(0,r)}$.

Si $r>R$ alors $|a_n| z^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Et donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge sur $\overline{D(0,r)}$

On appelle R le rayon de convergence de la série formelle f, on note $R=R(f)$:

$$\begin{cases} \forall z\in\mathbb{C}, |z|<R, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge} \\ \forall z\in\mathbb{C}, |z|>R, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ diverge grossièrement} \end{cases}$$

Notons de plus $\mathbb{C}\{\{X\}\}$ l'ensemble des séries formelles convergentes avec un rayon non nul : $\mathbb{C}\{\{X\}\} = \{f \in \mathbb{C}[[X]] : R(f) > 0\}$

$\mathbb{C}\{\{X\}\}$ est un sous anneau de $\mathbb{C}[[X]]$:

$(\mathbb{C}\{\{X\}\},+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}[[X]],+)$:

- $\forall f, g \in \mathbb{C}\{\{X\}\}$, $f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$, $g(X) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$ on a

  $f(X) - g(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k) X^k \in \mathbb{C}\{\{X\}\}$, en effet:

  Si $|z| \leq \min(R(f), R(g))$, alors $\left|(a_n - b_n) z^n\right| \leq \left|a_n z^n\right| + \left|b_n z^n\right|$ donc bornée.

  Et $R(f-g) \geq \min(R(f), R(g)) > 0$.

- $(fg)(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} \right) X^k$ appartient à $\mathbb{C}\{\{X\}\}$ avec $R(fg)$:

  $$(fg)(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} \right) X^k$$

  $$\left| \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} X^k \right| \leq \sum_{l=0}^{k} |a_l b_{k-l}| X^k$$

  Soit z tel que : $|z| \leq \min(R(f), R(g))$

  Alors : $$\sum_{l=0}^{k} |a_l b_{k-l}| |X|^k \leq \sum_{l=0}^{k} |a_l b_{k-l}| \left| X^l X^{k-l} \right|$$

  $$\leq \sum_{l=0}^{k} \left(|a_l| \left|X^l\right| \times |b_{k-l}| \left|X^{k-l}\right| \right)$$

  $$\sum_{l=0}^{k} |a_l b_{k-l}| |X|^k \leq \sum_{l=0}^{k} |a_l| \left|X^l\right| \times \sum_{l=0}^{k} |b_{k-l}| \left|X^{k-l}\right|$$

  Et $\sum_{l=0}^{k} |a_l| \left|X^l\right| < +\infty$ et $\sum_{l=0}^{k} |b_{k-l}| \left|X^{k-l}\right| < +\infty$

  D'où : $R(fg) \geq \min(R(f), R(g)) > 0$.

On a donc prouvé qu'étant donné une série f de $C\{\{X\}\}$ on peut définir une fonction, notée f, sur $D(0,R(f))$ par : $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, pour tout $z \in D(0,R(f))$.

Proposition 4 :

Si $(a_n)_{n\in \mathbb{N}}$ *est telle que :*

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ *a un rayon de convergence non nul*
2. *S'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\forall z, |z| \leq \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = 0$

Alors : $\forall n, a_n = 0$

I-3-2 Dérivée d'une série formelle convergente :

Remarque : $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k$, $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, ont même rayon de convergence, en effet :

Soient R et r leurs rayons de convergence respectifs :

-Si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ n'est pas bornée.

Il en est de même de la suite $(n+1)(a_{n+1} z^n)_{n\geq 0}$, d'où $r \leq R$.

-Supposons $|z| < R$ et soit $\alpha > 0$ tel que : $|z| + \alpha < R$

La série de terme général $|a_{n+1}|(|z|+\alpha)^n$ est convergente, or :

$$\left|(n+1)a_{n+1} z^n\right| \leq \frac{1}{\alpha} |a_{n+1}| (|z|+\alpha)^{n+1}$$

La série de terme général $(n+1)a_{n+1} z^n$ est absolument convergente, d'où $r \geq R$.

Et donc $r = R$.

Théorème 1 : En tout point z_0 du disque de convergence la fonction $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

est dérivable au sens complexe, de dérivée : $f'(z_0)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}{z_0}^n$

Preuve : Soit R le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et donc de $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$.

Soit $r \in \mathrm{P}$ tel que $|z_0|<r<R$.

Pour tout $z \in D(0,r)\setminus\{z_0\}$ on a :

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(z^n-{z_0}^n\right)\right]}{(z-z_0)}$$

Or $$z^n-{z_0}^n=(z-z_0)\left(z^{n-1}+z_0z^{n-2}+\cdots+{z_0}^{n-2}z+{z_0}^{n-1}\right)$$

D'où $$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(z^{n-1}+z_0z^{n-2}+\cdots+{z_0}^{n-2}z+{z_0}^{n-1}\right)$$

Posons les fonctions f_n définies par :

$$f_n : D(0,r)\to C$$
$$z \mapsto a_n\left(z^{n-1}+z_0z^{n-2}+\cdots+{z_0}^{n-2}z+{z_0}^{n-1}\right)$$

Chaque f_n est continue sur $D(0,r)$

De plus :

$$|f_n(z)|\le|a_n|\left(\left|z^{n-1}\right|+\left|z_0z^{n-2}\right|+\cdots+\left|{z_0}^{n-2}z\right|+\left|{z_0}^{n-1}\right|\right)$$

Or $|z_0|\le r$ et $|z|\le r$, d'où :

$$Sup\{|f_n(z)| : |z|\le r\}\le n|a_n|r^{n-1}$$

Comme $r<R$, la série de terme général $n|a_n|r^{n-1}$ est convergente d'où la série

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est convergente sur $D(0,r)$.

La fonction $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ est donc continue sur $D(0,r)$.

La limite $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe et on a :

$$f'(z_0)=\sum_{n=1}^{+\infty} na_n {z_0}^{n-1}$$

f est dérivable au sens complexe sur $D(0,R(f))$et

$f'(z)=\sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}$ si $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

D'où $f^{(p)}(0)=p!a_p,\ p\geq 0$,

On a donc : $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{k!}z^n \quad \forall z\in D(0,R(f))$.

I-3-3 Inverse d'une série formelle ou convergente :

Proposition 5 : *Si* $f\in C[[X]]$ *telle que* $f(0)\neq 0$,

Alors il existe une unique fonction $g\in C[[X]]$ *telle que :* $gf(X)=1$

<u>*Preuve*</u> : Soit $f(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k X^k$ et $a_0\neq 0$

On construit $g(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}b_k X^k$ par induction telle que $gf(X)=1$

$$a_0b_0=1 \quad\Rightarrow b_0=\frac{1}{a_0}$$

Si on a les $b_0,\ldots,b_{n-1}$ avec $b_na_0+b_{n-1}a_1+\cdots+b_0a_n=0$, on a : $$b_n = -\frac{1}{a_0}\left(b_{n-1}a_1 + \cdots + b_0 a_n\right).$$

Et $$g(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \text{ avec } \begin{cases} b_0 = \dfrac{1}{a_0} \\ b_n = -\dfrac{1}{a_0}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} b_i a_{n-i} \end{cases}.$$

Proposition 6 : Si $f \in \mathbb{C}\{\{X\}\}$ telle que $f(0) \neq 0$,

Alors il existe une unique fonction $g \in \mathbb{C}\{\{X\}\}$ *telle que :* $gf(X) = 1$

<u>*Preuve*</u> *:* On a montré dans la preuve précédente qu'il existait une suite $(b_n)_{n\geq 0}$ telle que $g(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ et $gf(X) = 1$.

On a l'expression des b_n : $b_n = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$.

On va maintenant montrer que $R(g) > 0$.

Pour cela on cherche à majorer $|b_n|$.

Pour $r < R$ la convergence vers 0 de la suite $(a_n)r^n$ assure l'existence de K tel que :

$$(a_n)r^n < K \text{ donc } a_n < \frac{K}{r^n}.$$

On obtient la majoration :

$$|b_n| \leq \frac{1}{|a_0|}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{K}{r^{n-k}}|b_k| = \frac{K}{|a_0|}\frac{1}{r^n}\sum_{k=0}^{n-1} r^k |b_k|$$

Soit m_k un majorant de $|b_k|$, il doit vérifier : $\frac{K}{|a_0|}\sum_{k=0}^{n-1} r^k m_k \leq r^n m_n$.

On pose $M_k = m_k r^k$ on est conduit à la récurrence : $\frac{K}{|a_0|}\sum_{k=0}^{n-1} M_k \leq M_n$.

On pose : $M_k = \lambda u^k$, on a donc :

$$\lambda u^k = m_k r^k \Rightarrow m_k = \frac{\lambda u^k}{r^k},$$

d'où pour $k = 0 \quad m_0 = \lambda$ .D'où : $|b_0| \leq \lambda$, ce qui conduit à $\lambda = \dfrac{1}{|a_0|}$.

L'inégalité $\dfrac{K}{|a_0|}\sum_{k=0}^{n-1} M_k \leq M_n$ implique :

$$\frac{K}{|a_0|}\lambda\frac{u^n - 1}{u-1} \leq \lambda u^n \Rightarrow \frac{K}{|a_0|}\left(u^n - 1\right) \leq (u-1)u^n.$$

Il suffit donc de prendre : $(u-1) = \dfrac{K}{|a_0|}$,

On a $$b_0 = \frac{1}{|a_0|} \leq \frac{1}{r^0}\frac{1}{|a_0|}\left(1 + \frac{K}{|a_0|}\right)^0$$

Supposons que : $$\forall k < n,\ |b_k| \leq \frac{1}{|a_0|}\left(\frac{|a_0| + K}{|a_0| r}\right)^k$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}
|b_n| &\leq \frac{K}{|a_0|}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|b_k|}{r^{n-k}} \\
&\leq \frac{K}{|a_0|}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{|a_0|}\left(\frac{|a_0| + K}{|a_0| r}\right)^k \frac{1}{r^{n-k}}\right] \\
&\leq \frac{K}{|a_0|^2}\frac{1}{r^n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{|a_0| + K}{|a_0|}\right)^k \\
&\leq \frac{K}{|a_0|^2}\frac{1}{r^n} \times \frac{1 - \left(\dfrac{|a_0| + K}{|a_0|}\right)^n}{1 - \dfrac{|a_0| + K}{|a_0|}}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{K}{|a_0|^2}\frac{1}{r^n}\times\frac{|a_0|}{|a_0|^n}\frac{|a_0|^n-(|a_0|+K)^n}{|a_0|-|a_0|-K}$$

$$\leq -\left(\frac{1}{|a_0|r^n}\right)+\frac{1}{|a_0|}\times\left(\frac{|a_0|+K}{|a_0|r}\right)^n$$

$$\leq \frac{1}{|a_0|}\times\left(\frac{|a_0|+K}{|a_0|r}\right)^n \qquad \text{avec} \quad -\left(\frac{1}{|a_0|r^n}\right)<0$$

D'où :

$$|b_n|\leq \frac{1}{|a_0|}\times\left(\frac{|a_0|+K}{|a_0|r}\right)^n$$

On arrive donc à la majoration :

$$|b_n|z^n \leq \frac{1}{|a_0|}\times\left(\frac{(|a_0|+K)z}{|a_0|r}\right)^n$$

Et $\frac{(|a_0|+K)z}{|a_0|r}$ est le terme d'une série convergente pour $|z|<\frac{|a_0|r}{|a_0|+K}=R$

De sorte que $g\in \mathbb{C}\{\{X\}\}$.

Corollaire : Si $f\in \mathbb{C}\{\{X\}\}$, $f(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kX^k$ $a_0\neq 0$

Alors : $\frac{1}{f}\in \mathbb{C}\{\{X\}\}$.

<u>*Preuve*</u> *: La fonction* $\frac{1}{f}$ est la fonction g de la proposition précédente.

I-3-4 q-dérivée d'une série convergente et q-taylor:

I-3-4-1 coïncidence du Dq formel et du Dq fonction:

Localement on a : $f(X)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{C}\{\{X\}\}$

Pour $S=\min(R(f),qR(f))$: $\hat{f}: D(0,S)\to \mathbb{C}$

$$z \mapsto \hat{f}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Proposition 7 *:* *La relation* $(*)$ *signifie :* $\widehat{\left(D_q(f)\right)}=\dot{D}_q\left(\hat{f}\right)$

Où $D_q : \mathbb{C}[[X]]\to \mathbb{C}[[X]]$ *et* $D_q : \mathbb{C}^{D(0,R)}\to \mathbb{C}$

$$f \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{q^n-1}{q-1}X^n \qquad\qquad g \mapsto \frac{g(qz)-g}{q-1}$$

Preuve : On applique l'opérateur $\dot{D}_q$ à la fonction $\hat{f}$:

$$\dot{D}_q\left(\hat{f}\right)=\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (qz)^n-\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n}{q-1}=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{q^n-1}{q-1}z^n$$

$$\dot{D}_q\left(\hat{f}\right)=D_q(f).$$

I-3-4-2 rayon de convergence de Dqf si f est une série convergente.

Proposition 8 : *Soit* $f \in C\{\{X\}\}$

Alors $D_q f \in C\{\{X\}\}$

Preuve : En effet :

Pour $|z| < R(f)$ *et* $|qz| < R(f)$,

Alors $f(z)$ *et* $f(qz)$ *ont un sens et on a :* $\dfrac{f(qz) - f(z)}{(q-1)z} = (D_q f)(z)$,

donc $(D_q f)(z)$ *est bien définie et :*

$$R(D_q f) \geq \min\left(R(f), \frac{1}{|q|} R(f) \right)$$

Soit $R' = R(D_q f) = R\left(\sum_{k=1}^{+\infty} [k] c_k z^{k-1} \right)$

D'où $\dfrac{1}{R'} = \limsup_{k \to +\infty} \left| [k] c_k \right|^{1/k}$

Or :
$$\limsup_{k \to +\infty} \left| [k] \right|^{1/k} = \begin{cases} 1 & si\ |q| < 1 \\ |q| & si\ |q| > 1 \end{cases}$$

D'où :
$$\limsup_{k \to +\infty} \left| [k c_k] \right|^{1/k} = \begin{cases} \limsup_{k \to +\infty} |c_k|^{1/k} & si\ |q| < 1 \\ |q| \limsup_{k \to +\infty} |c_k|^{1/k} & si\ |q| > 1 \end{cases}$$

Donc :
$$R' = \begin{cases} R(f) & si\ |q| < 1 \\ \dfrac{R(f)}{|q|} & si\ |q| > 1 \end{cases}.$$

I-3-4-3 q-formule de Taylor pour une série formelle convergente.

En particulier si $R(f) > 0$ et $|q| < 1$ alors le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(D_q^n f)(0)}{[k]!} X^n$ l'est aussi (c'est le même), et on a : $\forall z \in D(0, R(f))$: $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(D_q^n f)(0)}{[k]!} X^n$.

Donc l'opérateur D_q défini de $C[[X]]$ dans $C[[X]]$, se calcule pour une série formelle convergente par la formule :

$$\forall z \in D(0,R(f)) : D_q(f)(z) = D_q(f)(z) \qquad (*)$$

Nous pouvons donc définir les formules de Taylor « quantique » pour les séries entières de rayon de convergence strictement positif.

I-4 Exemples et applications :

Nous allons appliquer la q-formule de Taylor à plusieurs fonctions pour établir des égalités utiles :

I-4-1 Formule de Heine

Proposition 9 : *Formule de Heine :*

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = 1 + \sum_{j\geq 1} \frac{[n][n+1]..[n+j-1]}{[j]!} x^j \qquad (**)$$

C'est la q-série de Taylor de $\frac{1}{(1-x)_q^n}$ *en a=0.*

Preuve :

Pour $f(x) = \frac{1}{(1-x)_q^n}$ on trouve :

$$D_q\left(\frac{1}{(1-x)_q^n}\right) = \frac{1}{(q-1)x} \times \left[\frac{1}{(1-qx)(1-q^2x)...(1-q^{n-1})(1-q^n x)} - \frac{1}{(1-x)(1-qx)...(1-q^{n-1}x)}\right]$$

$$= \frac{1}{(q-1)x} \times \left[\frac{-(1-q^n x)+(1-x)}{(1-x)_q^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{(q^n-1)x}{(q-1)x} \times \frac{1}{(1-x)_q^{n+1}}$$

$$D_q\left(\frac{1}{(1-x)_q^n}\right) = \frac{[n]}{(1-x)_q^{n+1}}$$

On trouve donc par une récurrence immédiate:

$$D_q^j\left(\frac{1}{(1-x)_q^n}\right) = \frac{[n][n+1]..[n+j-1]}{(1-x)_q^{n+j}}, \quad \text{pour} \quad j \geq 1.$$

De sorte que : $$D_q^j\left(\frac{1}{(1-x)_q^n}\right)(0) = [n][n+1]..[n+j-1], \quad \text{pour} \quad j \geq 1.$$

On obtient donc la formule de Heine :

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = 1 + \sum_{j\geq 1} \frac{[n][n+1]..[n+j-1]}{[j]!} x^j \qquad (**)$$

I-4-2 Aparté : produit infini [R]

On manipulera souvent des produits infinis dans les preuves qui vont suivre, montrons donc les propriétés importantes des produits infinis :

Lemme 3 : *Soient des nombres complexes* $u_1, \ldots u_N$.

Si on définit : $p_N = \sum_{n=1}^{N}(1+u_n)$ *et* $\widetilde{p}_N = \prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|)$

On a $\widetilde{p}_N \leq \exp(|u_1| + \ldots + |u_N|) \qquad (*)$

Et $|p_N - 1| \leq \widetilde{p}_N - 1 \qquad (**)$

<u>*Preuve :*</u>

- Démontrons la relation $(*)$:

Pour $x \geq 0$ on a $1 + x \leq e^x$

D'où $1+|u_i| \le e^{|u_i|}$ pour $i = 1,\dots,N$

On a donc $\prod_{i=1}^{N}(1+|u_i|) \le \prod_{i=1}^{N} e^{|u_i|}$

Or $\prod_{i=1}^{N} e^{|u_i|} = \exp\left(\sum_{i=1}^{N}|u_i|\right)$

On obtient bien la relation : $\widetilde{p}_N \le \exp(|u_1|+\dots+|u_N|)$ $(*)$

- Démontrons la relation $(**)$:

Pour $N = 1$, la relation $(**)$ est évidente.
Supposons $(**)$ vraie au rang k si $k = 1,\dots,N-1$
On a :

$$\begin{aligned} p_{k+1} - 1 &= p_k(1+u_{k+1}) - 1 \\ &= p_k(1+u_{k+1}) - 1 - u_{k+1} + u_{k+1} \\ &= (p_k - 1)(1+u_{k+1}) + u_{k+1} \end{aligned}$$

Et donc : $|p_{k+1} - 1| \le |p_k - 1||1+u_{k+1}| + |u_{k+1}|$

Par l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |p_{k+1} - 1| &\le (\widetilde{p}_k - 1)(1+|u_{k+1}|) + |u_{k+1}| \\ &\le \widetilde{p}_k e^{|u_{k+1}|} - e^{|u_{k+1}|} + |u_{k+1}| \quad \text{avec } 1+|u_{k+1}| \le e^{|u_{k+1}|} \end{aligned}$$

$$|p_{k+1} - 1| \le \widetilde{p}_{k+1} - 1 \quad \text{avec } \widetilde{p}_{k+1} \le \widetilde{p}_k e^{|u_{k+1}|}$$

Pour $k = N-1$ on obtient $|p_N - 1| \le \widetilde{p}_N - 1$.

Théorème 2: *Soit $\{u_n\}$ une suite de fonctions bornées à valeurs complexes, définies sur un ensemble S, telle que $\sum_{n\ge1}|u_n(S)|$ converge uniformément sur S.*

Alors :

$(*)$ $f(s) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1+u_n(s))$ *converge uniformément sur S, et $f(s_0) = 0$ en un point s_0 de S si et seulement si : $u_n(s_0) = -1$ pour un certain entier n.*

De plus si $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ est une permutation quelconque de $\{1,2,3,\dots\}$ on a également :

$$(**) \qquad f(s)=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+u_{n_k}(s)\right) \qquad (s\in S)$$

Preuve :

$\sum_{n\geq 1}|u_n(s)|$ est bornée et si p_N désigne la $N^{ième}$ somme partielle : $p_N(s)=\sum_{n=1}^{N}(1+u_n(s))$, le lemme précédent établit l'existence d'une constante C, $C<\infty$ telle que $|p_N(s)|\leq C$ pour tout N et pour tout s.

Soit $\varepsilon : 0<\varepsilon<\frac{1}{2}$: il existe donc un entier N_0 tel que : $\sum_{n\geq N_0}|u_n(s)|<\varepsilon, \quad s\in S \qquad (1)$

Soit $\{n_1,n_2,n_3,\ldots\}$ une permutation de $\{1,2,3,\ldots\}$.

Si $N\geq N_0$ et si M assez grand pour que $\{1,2,3,\ldots,N\}\subset\{n_1,n_2,\ldots,n_M\}$,

On a, avec $q_M(s)$ le $M^{ième}$ produit partiel : $q_M(s)=\prod_{k=1}^{M}\left(1+u_{n_k}(s)\right)$.

$$q_M-p_N=p_N\left[\prod_{\substack{n_k:\\ n_k\in\{n_1,n_2,\ldots,n_M\}-\{1,2,\cdots,N\}}}^{M}\left(1+u_{n_k}\right)-1\right]$$

Les nombres n_k qui interviennent sont tous distincts et supérieurs à N_0.
D'après le lemme et la relation (1), on a :

$$\begin{aligned}|q_M-p_N| &\leq |p_N|\left[\exp\left(\sum_{n\geq N_0}|u_n(s)|\right)-1\right]\\ &\leq |p_N|\left(e^{\varepsilon}-1\right)\end{aligned}$$

Or $\quad 0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ d'où $e^{\varepsilon}-1\leq 2\varepsilon$,

en effet : $e^0-1=0\leq 2\times 0$

et $\frac{1}{2}<e^{1/2}-1<1$ d'où $e^{1/2}-1\leq e\times\frac{1}{2}$.

Or exponentielle est une fonction convexe, donc : $e^{\varepsilon}-1\leq 2\varepsilon$ si $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$.

De sorte que : $\qquad |q_M-p_N|\leq 2|p_N|\varepsilon\leq 2C\varepsilon \qquad (2)$

Lorsque $n_k=k, \quad k=1,2,3,\ldots$ on a $q_M=p_M$, et l'inégalité précédente indique que $(p_N)_N$ converge uniformément vers une fonction f.

De plus : $\qquad \left|p_M-p_{N_0}\right|\leq 2\left|p_{N_0}\right|\varepsilon, \qquad M>N_0$

D'où $\quad |p_M| \geq (1-2\varepsilon)|p_{N_0}|$

En effet : $\quad |p_{N_0}| - |p_M| \leq |p_M - p_{N_0}| \leq 2|p_{N_0}|\varepsilon,$

D'où : $\quad -|p_M| \leq (2\varepsilon - 1)|p_{n_0}| \quad \Rightarrow \quad |p_M| \leq (1-2\varepsilon)|p_{n_0}|$

Donc $\quad |j(s)| \geq (1-2\varepsilon)|p_{N_0}(s)|, \qquad s \in S$

Ce qui montre que $f(s) = 0$ si et seulement si $p_{N_0}(s) = 0$.
Et (2) montre que $(q_M)_{M\geq 0}$ converge vers la même limite que $(p_N)_{N\geq 0}$.

Théorème 3*: Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite telle que* $0 \leq u_n < 1$.
On dispose de l'équivalence : $\prod_{n\geq 1}(1-u_n) > 0$
si et seulement si $\sum_{n\geq 1} u_n < \infty$

<u>Preuve</u>:
Si $p_N = (1-u_1)\cdots(1-u_N)$, on a $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_N > 0$
Donc la limite p de p_N existe lorsque N tend vers l'infini.
Si $\sum_{n\geq 1} u_n < \infty$, le théorème2 implique $p > 0$.

Réciproquement $\quad p \leq p_N = \prod_{n=1}^{N}(1-u_n) \leq \exp\left(\sum_{n=1}^{N}(-u_n)\right)$

Et $\lim_{N\to\infty} \exp\left(\sum_{n=1}^{N}(-u_n)\right) = 0$ si $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} u_n = \infty$

D'où $\sum_{n=1}^{N} u_n < \infty \quad \Rightarrow \quad p > 0$.

I-4-3 Application identités d'Euler :

A partir de la formule du q-binôme de Newton vue plus haut :

$$(1+x)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{j(j-1)}{2}} x^j \qquad (*)$$

Et de la formule de Heine ci-dessus, en passant à la limite, nous allons en déduire les identités d'Euler :

Théorème3 (Euler) : Identités d'Euler :

$$(1+x)_q^\infty = \sum_{j=0}^{\infty} \left(q^{\frac{j(j-1)}{2}} x^j \times \frac{1}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^j)} \right) \qquad (E1)$$

$$\frac{1}{(1-x)_q^\infty} = \sum_{j\geq 0} \frac{x^j}{(1-q^j)(1-q^{j-1})...(1-q)} \qquad (E2)$$

<u>Preuve</u> :

- Première formule d'Euler :

Pour tout q tel que $|q|<1$, on a : $\lim_{n\to\infty}[n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

De sorte que : $\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})...(1-q^{n-j+1})}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^j)}$

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^j)} .$$

En passant à la limite dans la formule du q-binôme de Newton on trouve:

$$(1+x)_q^\infty = \sum_{j=0}^{\infty} \left(q^{\frac{j(j-1)}{2}} x^j \times \frac{1}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^j)} \right) \qquad (E1)$$

La permutation est justifiée car on a en effet :

De sorte que : $\left| \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \right| = \left| \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})...(1-q^{n-j+1})}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^j)} \right| \leq \frac{1}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^j)}$

Et $\sum_{j\geq 0} \frac{1}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^j)} < \infty$

- Seconde formule d'Euler :

Remarquons tout d'abord que :

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\left([n][n+1]..[n-j+1]\right)=\frac{1}{(1-q)^{j}},$$

Et : $$\underset{n\to\infty}{Lim}[j]!=[j]!=\frac{(1-q^{j})(1-q^{j-1})...(1-q)}{(1-q)^{j}},$$

Et dans la formule de Heine, avec les égalités ci-dessus, on obtient :

$$\frac{1}{(1-x)_q^{\infty}}=\sum_{j\geq 0}\frac{1}{(1-q)^{j}}\times\frac{1}{\dfrac{(1-q^{j})(1-q^{j-1})...(1-q)}{(1-q)^{j}}}x^{j}$$

D'où : $$\frac{1}{(1-x)_q^{\infty}}=\sum_{j\geq 0}\frac{x^{j}}{(1-q^{j})(1-q^{j-1})...(1-q)} \qquad (E2)$$

II Triple produit de Jacobi

La formule du triple produit de Jacobi permet transformer une somme en un produit, il nous sera très utile par la suite pour simplifier et permettre d'aboutir dans des calculs qui seraient sans lui fastidieux.

.

Théorème 4: *Pour $|q|<1$, on a la formule suivante, dite le triple produit de Jacobi:*

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} q^{j^2} z^j = \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-q^{2j}\right)\left(1+q^{2j-1}z\right)\left(1+q^{2j-1}z^{-1}\right) \qquad (J1)$$

Et avec les changements successifs : $qz \to z$ et $q^2 \to q$, on obtient la seconde forme du triple produit de jacobi :

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{j^2-j}{2}} z^j = \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-q^{j}\right)\left(1+q^{j-1}z\right)\left(1+q^{j}z^{-1}\right) \qquad (J2)$$

II-1 Première preuve d'Andrews, [KC] :

Dans cette preuve on modifie la première formule d'Euler par des changements élémentaires puis on fait apparaître les trois termes du produit de jacobi :

$$\text{Dans } (E1) : (1+x)_q^\infty = \sum_{j=0}^{\infty}\left(q^{\frac{j(j-1)}{2}} x^j \times \frac{1}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^j)}\right)$$

en remplaçant q par q² et x par zq, nous obtenons :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}(1+q^{2n+1}z) = \sum_{j=0}^{+\infty} q^{j(j-1)} z^j q^j \times \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2j})}$$

$$\prod_{n=0}^{+\infty}(1+q^{2n+1}z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{q^{j^2} z^j}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2j})}$$

En remplaçant n par n+1 dans le membre de gauche on obtient :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+q^{2n+1}z\right) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+q^{2n-1}z\right)$$

En multipliant par $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n}\right)$ on obtient :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}z\right)=\sum_{j=0}^{+\infty}\left[q^{j^2}z^{j}\left(\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n+2j+2}\right)\right)\right]$$

De plus pour tout $j<0$: il existe un $n_0 \geq 0$ tel que $2n_0+2j+2=0$

Et donc tel que : $1-q^{2n_0+2j+2}=0$

Doù : $$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}z\right)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left[q^{j^2}z^{j}\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n+2j+2}\right)\right)\right]$$

Dans $(E1)$ en remplaçant q par q², j par k et x par $-q^{2j+2}$, on obtient :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n+2j+2}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k q^{k^2+2kj+k}}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2k})}$$

De sorte que :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}z\right)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left[q^{j^2}z^{j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{k^2+2kj+k}}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2k})}\right]$$

$$=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k q^{k^2+2kj+j^2+k}z^{j}}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2k})}\right]$$

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}z\right)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k q^{(k+j)^2+k}z^{j}}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2k})}\right]$$

Et en remplaçant j par j-k on obtient :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}z\right)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{q^{j^2}q^{k}(-1)^k z^{j-k}}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2k})}\right]$$

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}z\right)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{q^{j^2}z^{j}(-qz^{-1})^k}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2k})}\right] \qquad (***)$$

Dans $(E2)$ en remplaçant q par q² et x par $-qz^{-1}$ on obtient :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(1+q^{2n-1}z^{-1}\right)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-qz^{-1})^k}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2k})} \qquad (****)$$

En injectant $(****)$ dans $(***)$ nous obtenons :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}z\right)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}q^{j^2}z^j\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(1+q^{2n-1}z^{-1}\right)}$$

D'où : $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}z\right)\left(1+q^{2n-1}z^{-1}\right)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}q^{j^2}z^j$

II-2 Seconde preuve, dite de Cauchy, indiquée par J.Zeng :

En effectuant les changements : n par 2n, j par j+n et x par $q^{-n}x$, dans la formule du q-binôme de Newton:

$$(1+x)_q^n=\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j\end{bmatrix}q^{\frac{j(j-1)}{2}}x^j$$

Nous obtenons : $\displaystyle(1+x)_q^{2n}=\sum_{j=0}^{2n}\begin{bmatrix} 2n \\ j\end{bmatrix}q^{\frac{j(j-1)}{2}}x^j$

Puis : $\displaystyle(1+x)_q^{2n}=\sum_{j=-n}^{n}\begin{bmatrix} 2n \\ n+j\end{bmatrix}q^{\frac{(n+j)(n+j-1)}{2}}x^{n+j}$

Enfin : $\displaystyle(1+q^{-n}x)_q^{2n}=\sum_{j=-n}^{n}\begin{bmatrix} 2n \\ n+j\end{bmatrix}q^{\frac{(n+j)(n+j-1)}{2}}q^{-n(n+j)}x^{n+j}$

$$(1+q^{-n}x)_q^{2n}=\sum_{j=-n}^{n}\begin{bmatrix} 2n \\ n+j\end{bmatrix}q^{\frac{j(j-1)}{2}}q^{-\frac{n(n+1)}{2}}x^n x^j \qquad (1)$$

En réécrivant le membre de gauche :

$$\begin{aligned}(1+q^{-n}x)_q^{2n}&=\left(1+q^{-n}x\right)\left(1+q^{-n+1}x\right)\ldots\left(1+q^{-1}x\right)\left[\left(1+x\right)\left(1+qx\right)\ldots\left(1+q^{n-1}x\right)\right]\\&=q^{-n+(-n+1)+\ldots+(-1)}x^n\left(q^nx^{-1}+1\right)\left(q^{n-1}x^{-1}+1\right)\ldots\left(qx^{-1}+1\right)\left(1+x\right)_q^n\\&=q^{\frac{-n(n+1))}{2}}x^n\left(1+qx^{-1}\right)_q^n\left(1+x\right)_q^n\end{aligned}$$

$$\left(1+q^{-n}x\right)_q^{2n} = q^{\frac{-n(n+1))}{2}} x^n \prod_{k=1}^{n}\left(1+q^k x^{-1}\right)_q^n \left(1+q^{k-1}x\right) \qquad (2)$$

D'où avec (1) et (2):

$$q^{\frac{-n(n+1))}{2}} x^n \prod_{k=1}^{n}\left(1+q^k x^{-1}\right)_q^n \left(1+q^{k-1}x\right) = \sum_{j=-n}^{n}\begin{bmatrix}2n\\ n+j\end{bmatrix}_q q^{\frac{j(j-1)}{2}} q^{-\frac{n(n+1)}{2}} x^n x^j$$

Et donc : $$\prod_{k=1}^{n}\left(1+q^k x^{-1}\right)_q^n \left(1+q^{k-1}x\right) = \sum_{j=-n}^{n}\begin{bmatrix}2n\\ n+j\end{bmatrix}_q q^{\frac{j(j-1)}{2}} x^j$$

On fixe q tel que $|q|<1$.

En prenant la limite à l'infini on obtient :

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n}(1+q^i x^{-1})(1+q^{i-1}x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\begin{bmatrix}2n\\ n+k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k$$

D'où : $$\prod_{i=0}^{\infty}(1+q^i x^{-1})(1+q^{i-1}x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\begin{bmatrix}2n\\ n+k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k$$

Pour permuter la limite et la somme dans le membre de droite appliquons le théorème de la convergence dominée, en effet :

$$\begin{bmatrix}2n\\ n+k\end{bmatrix} = \frac{\prod_{i=1}^{2n}(1-q^i)}{\prod_{i=1}^{n+k}(1-q^i)\prod_{i=1}^{n-k}(1-q^i)}$$

Or $$\left|\prod_{i=1}^{2n}(1-q^i)\right| \le 1 \quad \text{et} \quad \left|\prod_{i=1}^{n+k}(1-q^i)\prod_{i=1}^{n-k}(1-q^i)\right| \ge \left|\prod_{i=1}^{\infty}(1-q^i)\prod_{i=1}^{\infty}(1-q^i)\right|$$

De plus : soit $p_N = \prod_{i=1}^{N}(1-q^i), \quad avec \quad |q|<1$.

On a $p_1 \ge p_2 \ge \ldots \ge p_N > 0$

La suite $(\mathrm{p_n})_{\mathrm{n}\ge 1}$ est donc convergente vers p , $\mathrm{p} \ge 0$.

De plus $\sum_{i=1}^{+\infty} q^i$ converge car $|q|<1$, et $q^i \ne 1$ quelque soit q et quelque soit i de $\{1,2,\ldots\}$.

La limite p est donc strictement positive.

D'où $$\left|\begin{bmatrix}2n\\n+k\end{bmatrix}q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k\right| \le \left|\frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k}{\left[\prod_{i=1}^{\infty}(1-q^i)\right]^2}\right| = g_k(x),$$

Or $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ converge ,

D'où $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\begin{bmatrix}2n\\n+k\end{bmatrix}q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\begin{bmatrix}2n\\n+k\end{bmatrix}q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k$$

Et $$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}2n\\n+k\end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{i=1}^{2n}(1-q^i)}{\prod_{i=1}^{n+k}(1-q^i)\prod_{i=1}^{n-k}(1-q^i)} = \frac{\prod_{i=1}^{+\infty}(1-q^i)}{\prod_{i=1}^{+\infty}(1-q^i)\prod_{i=1}^{+\infty}(1-q^i)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{+\infty}(1-q^i)}$$

Ce qui donne :

$$\prod_{i=1}^{+\infty}(1+q^{i-1}x)(1+q^ix^{-1}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{q^{\frac{k^2-k}{2}}x^k}{\prod_{i=1}^{+\infty}(1-q^i)}$$

D'où $$\underline{\prod_{i=1}^{+\infty}(1-q^i)(1+q^{i-1}x)(1+q^ix^{-1}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}q^{\frac{k^2-k}{2}}x^k}.$$

II-3 Variante de la formule du triple produit de Jacobi

A partir de la formule du triple produit et en effectuant des changements de variables élémentaires on peut obtenir la formule suivante, qui nous sera entre autre utile dans la preuve du théorème de la représentation d'un entier en somme de deux carrés.

Proposition 10 : $$\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)^3 = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(2n+1)q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Preuve : À partir de la formule du triple produit de Jacobi :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}z\right)\left(1+q^{2n-1}z^{-1}\right)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}z^{j}q^{j^2}$$

En effectuant les changements de variables successifs et en faisant tendre le terme « z » dans l'égalité vers (-1) on obtient facilement cette égalité :

On remplace zq^{-1} par z dans le TPJ:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}z^{j}q^{j^2+j}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n}z\right)\left(1+q^{2n-2}z^{-1}\right)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}z^{j}q^{\frac{j^2+j}{2}}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n}\right)\left(1+q^{n}z\right)\left(1+q^{n-1}z^{-1}\right)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}z^{j}q^{\frac{j^2+j}{2}}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n}z\right)\times\left(1+z^{-1}\right)\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+q^{n-1}z^{-1}\right)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}z^{j}q^{\frac{j^2+j}{2}}=\left(1+z^{-1}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n}z\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n}z^{-1}\right)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{z^{j}}{1+z^{-1}}q^{\frac{j^2+j}{2}}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n}\right)\left(1+q^{n}z\right)\left(1+q^{n}z^{-1}\right)$$

On fait tendre « z » vers (-1) dans le terme de droite:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n}\right)\left(1+q^{n}z\right)\left(1+q^{n}z^{-1}\right)\xrightarrow[z\to-1]{}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n}\right)^{3}$$

On réécrit le terme de gauche :

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{z^{j}}{1+z^{-1}}q^{\frac{j^2+j}{2}}=\sum_{j=-\infty}^{-1}\frac{z^{j}}{1+z^{-1}}q^{\frac{j^2+j}{2}}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{j}}{1+z^{-1}}q^{\frac{j^2+j}{2}}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} & n^2+n=m^2+m \\ \Leftrightarrow\quad & n^2-m^2+n-m=0 \\ \Leftrightarrow\quad & (n-m)(n+m+1)=0 \\ \Leftrightarrow\quad & n=m \quad ou \quad n=-m-1 \end{aligned}$$

D'où : $$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\frac{z^{j}}{1+z^{-1}}q^{\frac{j^2+j}{2}}=\sum_{j=-\infty}^{-1}\frac{z^{j}}{1+z^{-1}}q^{\frac{j^2+j}{2}}+\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{z^{j}}{1+z^{-1}}q^{\frac{j^2+j}{2}}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{z^j}{1+z^{-1}}q^{\frac{j^2+j}{2}}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{z^{-1-j}}{1+z^{-1}}q^{\frac{j^2+j}{2}}+\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{z^j}{1+z^{-1}}q^{\frac{j^2+j}{2}}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{z^j}{1+z^{-1}}q^{\frac{j^2+j}{2}}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{z^{-1-j}+z^j}{1+z^{-1}}q^{\frac{j^2+j}{2}}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{z^j}{1+z^{-1}}q^{\frac{j^2+j}{2}}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{z^{-j}+z^{j+1}}{z+1}q^{\frac{j^2+j}{2}}$$

On introduit la fonction suivante : $f(z)=z^{j+1}+z^{-j}$

D'où : $f'(z)=(j+1)z^j-jz^{-(j+1)}$

On remarque que: $f(-1)=0$ et $f'(-1)=(-1)^j(2j+1)$

D'où : $\lim\limits_{z\to-1}\dfrac{f(z)-f(-1)}{z-(-1)}=\lim\limits_{z\to-1}\dfrac{z^{j+1}+z^{-j}}{z+1}=f'(-1)$

De sorte que l'on a : $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\lim_{z\to-1}\frac{z^{-j}+z^{j+1}}{z+1}q^{\frac{j^2+j}{2}}\right)=\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j(2j+1)q^{\frac{j^2+j}{2}}$

D'où : $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)^3=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(2n+1)q^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

III Partitions

III-1 Définition et premières propriétés

Une partition d'un entier strictement positif *n* est une façon d'écrire *n* comme une somme d'entiers strictement positifs. Soit *n* un entier strictement positif, une partition de *n* est une suite d'entiers $(S_1,\ldots,S_m)$ vérifiant :

- $m \geq 1$
- tous les entiers S_i sont non nuls
- $S_1 \geq \ldots \geq S_m$
- $\sum_{i=1}^{m} S_i = n$.

Une k-partition de l'entier *n* est une partition de *n* possédant *k* éléments.

On introduit la fonction $p(n)$ définie sur l'ensemble des nombres entiers, $p(n)$ est le nombre de manières de représenter un entier *n* comme une somme de nombre entiers positifs, en ne tenant pas compte de l'ordre des termes, si $n > 0$, $p(n)=0$ si $n < 0$, et $p(0)=1$.

Le nombre de partitions de *n* en exactement k parts est noté $p_k(n)$.

On introduit de plus $p_d(n,r) = \{partitions\ \ de\ \ n\ en\ r\ \ parts\ distinctes\}$.

Et $p_d(n) = \{partitions\ de\ n\ en\ \ parts\ \ distinctes\}$.

On obtient facilement l'égalité :

Proposition 11 : *On a* $\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-q^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} p(k) q^k$.

Preuve :

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-q^k}=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+q^k+q^{2k}+\ldots+q^{rk}+\ldots\right)$$

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-q^k}=\sum_{n_k\in\mathrm{N}^{\mathrm{N}^*}}\left(1\times q^{\sum_{k=1}^{+\infty}n_k k}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-q^k}=\sum_{n\in\mathrm{N}}\#\left\{(\mathrm{n_k}):\sum_{k=1}^{+\infty}kn_k=n\right\}q^n$$

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-q^k}=\sum_{n\in\mathrm{N}}p(n)q^n\ .$$

On pose de même : $\left\{\begin{array}{l} J(n)=\{\textit{nombre de partition en parts impaires}\} \\ D(n)=\{\textit{nombre de partition en parts paires}\}\end{array}\right.$.

Proposition 12: *Le nombre de partitions en parts distinctes* :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}p_d(n)q^n=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+q^n\right).$$

Proposition 13: *Le nombre de partitions en parts impaires:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}J(n)q^n=\prod_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{1-q^{2i-1}}\ .$$

Preuve :

$$\prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-q^{2i-1}}=\prod_{\substack{i\geq 1\\ i\ impair}}\left(1+q^i+q^{2i}+q^{3i}+\ldots\right)$$

Si on développe le produit de droite, tous les termes sont de la forme : $q^n=q^{k_1i_1+k_2i_2+\ldots+k_li_l}$,

avec i_j impair pour tout $j\in\{1,2,\ldots l\}$.

Ce terme est une partition de l'entier *n* en parts impaires. On a donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} J(n)q^n = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-q^{2i-1}}.$$

Proposition 14: *Le nombre de partitions en parts impaires est égal au nombre de partition en parts distinctes :* $\sum_{n=1}^{+\infty} J(n)q^n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_d(n)q^n$

<u>*Preuve*</u> :

$$\prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-q^{2i-1}} = \prod_{i\geq 1} \frac{1-q^{2i}}{(1-q^{2i-1})(1-q^{2i})}$$

$$= \prod_{i\geq 1} \frac{(1-q^i)(1+q^i)}{(1-q^i)}$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} J(n)q^n = \prod_{i\geq 1} (1+q^i)$$

Et enfin :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} J(n)q^n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_d(n)q^n$$

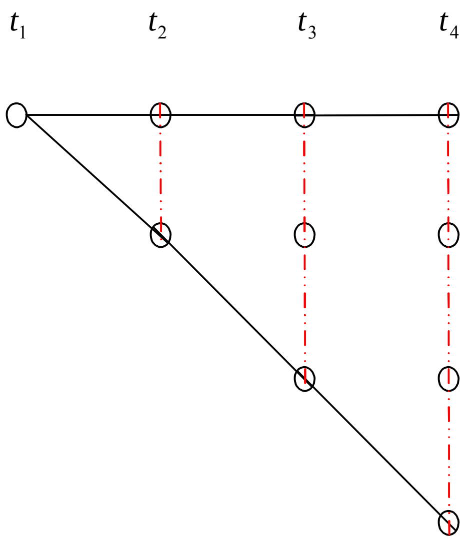
On introduit de plus la fonction $\varphi(q)$: $\varphi(q) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1-q^n)$ et les nombres $e_n = \frac{3n^2-n}{2}$ dits nombres pentagonaux.

De même que les nombre pentagonaux on peut introduire : $t_n = \frac{n^2+n}{2}$, ces nombres sont appelés nombres triangulaires.

Ces nombres sont appelés ainsi à cause de leur propriété géométrique :

Les nombres triangulaires se retrouvent géométriquement avec le dessin ci-dessous , ils représentent le nombre de sommets des différents triangles semblables obtenus à partir d'un triangle initial.

On a $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 6$, $t_4 = 10$, on retrouve ces nombre en comptant les sommets qui appartiennent à chaque nouveau triangle construit (on compte aussi les « sommets » intérieurs) :



De même des pentagones semblables entre eux peuvent être obtenus par un premier en joignant les nièmes sommets sur chaque rayon. Les nombres de sommets inclus dans des pentagones sont les nombres pentagonaux.

On peut trouver les nombres m-gonaux de façon similaire.

La proposition suivante montre comment la fonction $\varphi(q)$ est liée aux partitions des nombres entiers, en effectuant les changements dans la formule du triple produit de Jacobi, on arrive à l'égalité suivante :

Proposition 15 : *La formule du produit d'Euler :* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}} = \prod_{n=1}^{+\infty} (1-q^n)$

<u>Preuve</u> : $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} z^n = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1-q^{2n}\right)\left(1-q^{2n-1}z\right)\left(1-q^{2n-1}z^{-1}\right)$$

$q \to q^{3/2}$ et $z \to -q^{-1/2}$: $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1-q^{3n}\right)\left(1-q^{3n-2}\right)\left(1-q^{3n-1}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1-q^{3n}\right)\left(1-q^{3n-2}\right)\left(1-q^{3n-1}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1-q^{n}\right).$$

Remarque : en effectuant le calcul à la main des premiers termes (et en n'oubliant pas les *n* négatifs), on constate effectivement cette égalité étonnante.

.

On pose : $P(n) = \{partitions\ de\ n\ en\ un\ nombre\ pair\ de\ parts\ distinctes\}$

$I(n) = \{partitions\ de\ n\ en\ un\ nombre\ impair\ de\ parts\ distinctes\}$

Proposition 16 : $$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1-q^n\right) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} [P(n) - I(n)] q^n$$

<u>Preuve</u> *:* dans r facteurs on regroupe le terme $\left(-q^n\right)$ *:*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1-q^n\right) = 1 + \sum_{r\geq 1} \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_r)\in (N^*)^r \\ n_i \neq n_j\ si\ i\neq j}} \left(-q^{n_1}\right)\ldots\left(-q^{n_r}\right)$$

On regroupe suivant l'exposant de q *:*

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^n\right)=1+\sum_{n\geq 1}\sum_{r\geq 1}\left(\sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_r)\geq 1\\ n_i\neq n_j\ si\ i\neq j}}(-1)^r\right)q^n$$

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^n\right)=1+\sum_{n\geq 1}\sum_{r\geq 1}p_d(n,r)(-1)^r q^n$$

On obtient en regroupant suivant les r pairs et les r impairs:

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^n\right)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}[P(n)-I(n)]q^n .$$

Les propositions 14 et 15 donnent donc que :

$$P(n)-I(n)=\begin{cases}\pm 1 & si\ \ \exists k\in Z:\ n=e_k\\ 0 & sinon\end{cases}$$

III-2 Congruence de Ramanujan.

Proposition 17 : On a la congruence due à Ramanujan : $p(5n+4)\equiv 0[\bmod 5]$.

La preuve de cette congruence repose essentiellement sur de l'algèbre linéaire :

Preuve [He]:

Notations : Pour $n\in Z$, on note $e_n=\dfrac{3n^2-n}{2}$ le nième nombre pentagonal et $t_n=\dfrac{n^2+n}{2}$ le nième nombre triangulaire. On désigne par x une indéterminée et on pose :

$$\varphi(x)=\sum_{n\in Z}(-1)^n x^{\frac{3n^2-n}{2}}=\sum_{n\in Z}(-1)^n x^{e_n}$$

On a vu, c'est une conséquence du triple produit que :

$$\varphi(x)^3 = \sum_{n\in Z}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n^2+n}{2}} = \sum_{n\in Z}(-1)^n(2n+1)x^{t_n}$$

D'autre part, on note P la série génératrice des partitions :

$$P(x) = \sum_{n\in N} p(n)x^n = \prod_{n\geq 1}\frac{1}{1-x^n}$$

On sépare les coefficients selon le reste modulo 5 de l'exposant x. Pour $s \in \{0,1,2,3,4\}$, on pose :

$$G_s(x) = \sum_{e_n\equiv s[5]}(-1)^n x^{e_n}$$

$$H_s(x) = \sum_{t_n\equiv s[5]}(-1)^n(2n+1)x^{t_n}$$

$$P_s(x) = \sum_{n\equiv s[5]} p(n)x^n$$

Il est clair que l'on a : $\varphi(x) = \sum_{s=0}^{4} G_s(x)$, $\varphi(x)^3 = \sum_{s=0}^{4} H_s(x)$, $P(x) = \sum_{s=0}^{4} P_s(x)$

De plus, la formule de produit d'Euler (proposition 14) donne :

$$G_s(x) = \prod_{n\geq 1}(1-x^n) = \frac{1}{P(x)} \quad , \quad \text{ou} \quad G(x)P(x) = 1$$

En développant le produit et en séparant les termes selon l'exposant de x, il vient :

$$(S) \qquad \begin{cases} G_0P_0 + G_4P_1 + G_3P_2 + G_2P_3 + G_1P_4 = 1 \\ G_1P_0 + G_0P_1 + G_4P_2 + G_3P_3 + G_2P_4 = 0 \\ G_2P_0 + G_1P_1 + G_0P_2 + G_4P_3 + G_3P_4 = 0 \\ G_3P_0 + G_2P_1 + G_1P_2 + G_0P_3 + G_4P_4 = 0 \\ G_4P_0 + G_2P_1 + G_2P_2 + G_1P_3 + G_0P_4 = 0 \end{cases}$$

Déterminant circulant :

Soit $n \in N^*$ et $G_0,\ldots,G_{n-1}$ des éléments d'un certain corps contenant les racines nième de l'unité.

On cherche à calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A(G_0,\ldots,G_{n-1}) = \begin{pmatrix} G_0 & G_1 & G_2 & \ddots & G_{n-1} \\ G_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & G_2 \\ G_2 & \ddots & \ddots & \ddots & G_1 \\ G_1 & G_2 & \ddots & G_{n-1} & G_0 \end{pmatrix}$$

On constate que $A(G_0,\ldots,G_{n-1})$ est un polynôme en $A = A(0,1,0,\ldots,0)$, avec :

$$A(0,1,0,\ldots,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \end{pmatrix}.$$

On a en effet : $$A(G_0,\ldots,G_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} G_j A^j$$

Toute matrice circulante est un polynôme en A.

A^n est la matrice identité I donc tout polynôme en A est une matrice circulante.

$AA^{n-1} = I$, et A est donc inversible.

Les valeurs propres de A sont les racines nième de l'unité. Soit ζ une racine primitive de l'unité, les valeurs propres sont $1, \zeta, \ldots, \zeta^{n-1}$.

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \zeta \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \zeta x_1 \\ x_3 = \zeta x_2 \\ \vdots \\ x_n = \zeta x_{n-1} \\ x_1 = \zeta x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \zeta x_1 \\ x_3 = \zeta^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \zeta^{n-1} x_1 \\ x_1 = x_1 \end{cases}.$$

Le vecteur propre de ζ est : $\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{pmatrix}$, et celui de ζ^k pour $k \in \{0,\cdots,n-1\}$ est : $\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^k \\ \vdots \\ \zeta^{(n-1)k} \end{pmatrix}$.

C'est une base de diagonalisation de A et donc aussi de tout polynôme en A.

Si B est une matrice diagonalisable, $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ ses valeurs propres. Pour un polynôme P quelconque, on pose $P(X) = c_0 + c_1 X + \ldots + c_l X^l$, on a : $\det(P(B)) = \prod_{i=1}^{n} P(\lambda_i)$.

B est diagonalisable, il existe donc deux matrices D et Q telles que : $B = Q^{-1}DQ$

On a donc :

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(Q^{-1}DQ\right) \\ &= c_0 + c_1 Q^{-1}DQ + \ldots + c_l Q^{-1}D^l Q \\ &= Q^{-1}\left(c_0 + c_1 D + \ldots + c_l D^l\right)Q \end{aligned}$$

$$P(B) = Q^{-1}\begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & P(\lambda_1) & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & P(\lambda_1) \end{pmatrix} Q$$

On a donc : $$\det(P(B)) = \det\begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & P(\lambda_1) & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & P(\lambda_1) \end{pmatrix}$$

Et $$\det(P(B)) = \prod_{i=1}^{n} P(\lambda_i).$$

Pour notre matrice A on trouve donc :

$$D = \det\left(\sum_{j=0}^{n-1} G_j A^j\right) = \prod_{\zeta^n = 1} P(\zeta) \qquad \text{avec } P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} G_i x^i$$

Application au système :

Notons que pour ζ une racine cinquième de l'unité et $s \in \{0,1,2,3,4\}$ on a :

$$e_n \equiv s[5] \quad \Leftrightarrow \quad \zeta^s x^{e_n} = (\zeta x)^{e_n}$$

D'où

$$\zeta^s G_s(x) = \sum_{e_n \equiv s[5]} (-1)^n \zeta^s x^{e_n} = \sum_{e_n \equiv s[5]} (-1)^n (\zeta x)^{e_n} = G_s(\zeta x)$$

Si bien que

$$D = \prod_{\zeta^5=1} \sum_{s=0}^{4} \zeta^s G_s(x) = \prod_{\zeta^5=1} \sum_{s=0}^{4} G_s(\zeta x) = \prod_{\zeta^5=1} \varphi(\zeta x)$$

En considérant (S)comme un système linéaire en les P_i , comme on vient de voir que le déterminant D du système n'est pas nul, et les formules de Cramer donnent :

$$P_4 = \frac{\begin{vmatrix} * & * & * & * & 1 \\ G_1 & G_0 & G_4 & G_3 & 0 \\ G_2 & G_1 & G_0 & G_4 & 0 \\ G_3 & G_2 & G_1 & G_0 & 0 \\ G_4 & G_3 & G_2 & G_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_0 & G_4 & G_3 & G_2 & G_1 \\ G_1 & G_0 & G_4 & G_3 & G_2 \\ G_2 & G_1 & G_0 & G_4 & G_3 \\ G_3 & G_2 & G_1 & G_0 & G_4 \\ G_4 & G_3 & G_2 & G_1 & G_0 \end{vmatrix}} = \frac{D_4}{D}, \qquad \text{où } D_4 = \begin{vmatrix} G_1 & G_0 & G_4 & G_3 \\ G_2 & G_1 & G_0 & G_4 \\ G_3 & G_3 & G_1 & G_0 \\ G_4 & G_3 & G_3 & G_1 \end{vmatrix}.$$

Annulation de certains G_s et H_s et calcul de D_4 :

On calcule modulo 5 :

n	0	1	2	3	4
$e_n = \dfrac{3n^2-n}{2}$	0	1	0	2	2
$t_n = \dfrac{n^2+n}{2}$	0	1	3	1	0

On constate que e_n n'est jamais congru à 3 ni à 4, donc les sommes G_3 et G_4 sont nulles. De même, t_n n'est jamais congru à 2 ni à 4, donc les sommes H_2 et H_4 sont nulles. On en déduit :

$$D_4 = \begin{vmatrix} G_1 & G_0 & 0 & 0 \\ G_2 & G_1 & G_0 & 0 \\ 0 & G_3 & G_1 & G_0 \\ 0 & 0 & G_3 & G_1 \end{vmatrix}$$

$$D_4 = G_1 \begin{vmatrix} G_1 & G_0 & 0 \\ G_2 & G_1 & G_0 \\ 0 & G_2 & G_1 \end{vmatrix} - G_0 \begin{vmatrix} G_2 & G_0 & 0 \\ 0 & G_1 & G_0 \\ 0 & G_2 & G_1 \end{vmatrix}$$

$$D_4 = G_1\left(G_1^3 - 3G_0G_1G_2\right) - G_0G_2\left(G_1^2 - G_0G_2\right)$$

$$D_4 = G_1^4 - 3G_1^2G_0G_2 + \left(G_0G_2\right)^2$$

Expression de H_2 en fonction des G_i et simplification de D_4 :

Compte tenu de $G_3 = G_4 = 0$, on a :

$$H(x) = \left(G_0 + G_1 + G_2\right)^3 = \sum_{(i,j,k)\in\{0,1,3\}^3} G_iG_jG_k \qquad \text{(27 termes).}$$

Dans la somme G_s ne figurent que des puissances de x congrues à s modulo 5. Celles qui sont congrues à 2modulo 5 proviennent des facteurs $G_iG_jG_k$ tels que $i + j + k \equiv 2[5]$.

Or à partir de trois des nombres $0,1,2 \in Z/5Z$, on peut former 2 de deux façons différentes seulement :

$$2 = 0 + 0 + 2 = 0 + 1 + 1$$

Chacune de ces décompositions est réalisée par 3 termes (le choix du facteur non répété, parmi 3 possibles, fixe les autres). D'où :

$$0 = H_2 = 3G_0^2G_2 + 3G_0G_1^2 = 3G_0\left(G_0G_2 + G_1^2\right)$$

En reportant dans l'expression de D_4 , il vient :

$$D_4 = 5G_1^4$$

Expression de G_1 en fonction de φ :

Le tableau ci-dessus montre que pour $n \in Z$,on a :

$$e_n \equiv 1[5] \quad \Leftrightarrow \quad n \equiv 1[5] \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in Z, n = 5k + 1$$

On a donc : $G_1(x) = \sum_{e_n \equiv 1[5]} (-1)^n x^{e_n} = \sum_{k\in Z} (-1)^{5k+1} x^{\frac{(5k+1)(15k+2)}{2}}$

$$= -\sum_{k\in Z} (-1)^k x^{\frac{75k^2+25k}{2}+1}$$

$$G_1(x) = -x\sum_{k\in Z}(-1)^k x^{25\frac{3k^2+k}{2}}$$

Et le changement d'indice $(-k) \to k$ donne : $G_1(x) = -x\varphi(x^{25})$.

Par suite : $D_4 = 5x^4\varphi(x^{25})^4$

Fin du calcul :

Reportons les valeurs de D et de D_4 dans P_4 :

$$\sum_{k\geq 0} p(5k+4)x^{5k+4} = P_4(x) = \frac{D_4}{D} = \frac{5x^4\varphi(x^{25})^4}{\varphi(x)\varphi(\zeta x)\varphi(\zeta^2 x)\varphi(\zeta^3 x)\varphi(\zeta^4 x)}$$

On veut simplifier le produit au dénominateur. Plus précisément, pour démontrer l'égalité :

$$\sum_{k\geq 0} p(5k+4)X^k = 5\frac{\varphi(X^5)^5}{\varphi(X)^6}$$

il suffit de prendre $X = x^5$ et de montrer que

$$\frac{1}{\varphi(x)\varphi(\zeta x)\varphi(\zeta^2 x)\varphi(\zeta^3 x)\varphi(\zeta^4 x)} = \frac{\varphi(x^{25})}{\varphi(x^5)^6}$$

On revient à l'expression de φ comme produit :

$$\prod_{\zeta^5=1}\varphi(\zeta x) = \varphi(x)\varphi(\zeta x)\varphi(\zeta^2 x)\varphi(\zeta^3 x)\varphi(\zeta^4 x) = \prod_{\zeta^5=1}\prod_{m\geq 1}\left(1-(\zeta x)^m\right) = \prod_{m\geq 1}\prod_{\zeta^5=1}\left(1-(\zeta x)^m\right)$$

Le produit au dénominateur se simplifie différemment si $m \equiv 0[5]$ ou si $m \not\equiv 0[5]$. En effet,

- Si $m = 5k$, on a bien sûr :

$$\prod_{\zeta^5=1}\left(1-(\zeta x)^m\right) = \prod_{\zeta^5=1}\left(1-(\zeta x)^{5k}\right) = \left(1-x^{5k}\right)^5;$$

- Mais si $m \not\equiv 0[5]$, alors $\zeta \mapsto \zeta^m$ est une bijection sur $\{\zeta^5 = 1\}$, d'où :

$$\prod_{\zeta^5=1}\left(1-(\zeta x)^m\right) = \prod_{\zeta^5=1}\left(1-\zeta x^m\right) = 1-\left(x^m\right)^5.$$

On en tire, en séparant les m selon leur nullité modulo 5 :

$$\prod_{\zeta^5=1}\varphi(\zeta x)=\prod_{k\geq 1}\left(1-x^{5k}\right)^5\times\prod_{m\not\equiv 0[5]}\left(1-x^{5m}\right)$$

$$=\prod_{k\geq 1}\left(1-x^{5k}\right)^5\times\frac{\prod_{m\geq 1}\left(1-x^{5m}\right)}{\prod_{m\equiv 0[5]}\left(1-x^{5m}\right)}$$

$$=\prod_{k\geq 1}\left(1-x^{5k}\right)^5\times\frac{\prod_{m\geq 1}\left(1-x^{5m}\right)}{\prod_{k\geq 1}\left(1-x^{25k}\right)}$$

$$\prod_{\zeta^5=1}\varphi(\zeta x)=\varphi\left(x^5\right)^5\frac{\varphi\left(x^5\right)}{\varphi\left(x^{25}\right)}=\frac{\varphi\left(x^5\right)^6}{\varphi\left(x^{25}\right)}.$$

On arrive donc à l'égalité voulue : $\sum_{k\geq 0}p(5k+4)x^{5k+4}=5\frac{x^4\varphi\left(x^{25}\right)^5}{\varphi\left(x^5\right)^6}$

On simplifie le terme « x^4 » et on pose $X=x^5$: $\sum_{k\geq 0}p(5k+4)X^k=5\frac{\varphi\left(X^5\right)^5}{\varphi(X)^6}$

Le coefficient du terme « X^n » dans le membre de gauche est trivialement multiple de 5, cela montre l'égalité recherchée :

$$\underline{p(5n+4)\equiv 0[\text{mod } 5]}.$$

IV Théorèmes du nombre de représentation d'un entier comme somme de deux ou quatre carrés.

IV-1 Théorème des deux carrés

Théorème 5 : *Le nombre de représentations de n comme somme de deux carrés est quatre fois la différence entre le nombre de diviseurs de n congru à 1 modulo 4 et le nombre de diviseurs de n congru à 3 modulo 4 :*

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2}\right)^2 = 1 + 4\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{q^{4n+1}}{1-q^{4n+1}} - \frac{q^{4n+3}}{1-q^{4n+3}}\right)$$

Preuve d'Hirschhorn [Hi]**:**

Nous allons donner une courte preuve de ce théorème à partir de la première forme de la formule du triple produit de Jacobi : $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+aq^{2n-1}\right)\left(1+a^{-1}q^{2n-1}\right)\left(1-q^{2n}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n q^{n^2}$

<u>*Preuve*</u> *:* A partir de l'égalité trouvée dans la partie II (proposition 10) :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^n\right)^3 = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(2n+1)q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

On trouve en écrivant la somme de droite selon les n pairs $(n=2n)$ et les n impairs $(n=2n-1)$:

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^n\right)^3 = \sum_{n=0}^{+\infty}(4n+1)q^{n(2n+1)} - \sum_{n=1}^{+\infty}(4n-1)q^{n(2n-1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(4n+1)q^{n(2n+1)} + \sum_{n=-\infty}^{-1}(4n+1)q^{n(2n+1)}$$

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^n\right)^3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(4n+1)q^{n(2n+1)} \qquad (a)$$

De plus à partir de la première formule du produit de jacobi :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n q^{n^2} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+aq^{2n-1}\right)\left(1+a^{-1}q^{2n-1}\right)\left(1-q^{2n}\right)$$

Avec q donne q^2 :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n q^{2n^2} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+aq^{4n-2}\right)\left(1+a^{-1}q^{4n-2}\right)\left(1-q^{4n}\right)$$

Et a donne aq :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n q^{2n^2+n} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+aq^{4n-1}\right)\left(1+a^{-1}q^{4n-3}\right)\left(1-q^{4n}\right)$$

Et enfin a donne a^4 :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{4n} q^{2n^2+n} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+a^4q^{4n-1}\right)\left(1+a^{-4}q^{4n-3}\right)\left(1-q^{4n}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{4n+1} q^{2n^2+n} = a\times\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+a^4q^{4n-1}\right)\left(1+a^{-4}q^{4n-3}\right)\left(1-q^{4n}\right)$$

En dérivant par rapport à a cette égalité en utilisant les dérivées logarithmiques:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(4n+1)a^{4n} q^{2n^2+n} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+a^4q^{4n-1}\right)\left(1+a^{-4}q^{4n-3}\right)\left(1-q^{4n}\right)\times\left\{1+a\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4a^3q^{4n-1}}{1+a^{-4}q^{4n-1}}+a\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-4a^{-5}q^{4n-3}}{1+a^{-4}q^{4n-3}}\right\}$$

en $a=1$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(4n+1)q^{2n^2+n} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+q^{4n-1}\right)\left(1+q^{4n-3}\right)\left(1-q^{4n}\right)\times\left\{1+4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{q^{4n-1}}{1+q^{4n-1}}-\frac{q^{4n-3}}{1+q^{4n-3}}\right)\right\}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(4n+1)q^{2n^2+n} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+q^{4n-1}\right)\left(1+q^{4n-3}\right)\left(1-q^{4n}\right)\times\left\{1+4\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{q^{4n+3}}{1+q^{4n+3}}-\frac{q^{4n+1}}{1+q^{4n+1}}\right)\right\}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(4n+1)q^{2n^2+n} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+q^{4n-1}\right)\left(1+q^{4n-3}\right)\left(1-q^{4n}\right)\times\left\{1-4\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{q^{4n+1}}{1+q^{4n+1}}-\frac{q^{4n+3}}{1+q^{4n+3}}\right)\right\} \qquad (b)$$

Avec (a)et(b), on obtient :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{n}\right)^{3}=\prod_{n=1}^{+\infty}\left[\left(1+q^{4n-1}\right)\left(1+q^{4n-3}\right)\left(1-q^{4n}\right)\right]\times\left\{1-4\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{q^{4n+1}}{1+q^{4n+1}}-\frac{q^{4n+3}}{1+q^{4n+3}}\right)\right\} \qquad (c)$$

On réécrit le membre de gauche :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{n}\right)^{3}=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n-1}\right)^{3}\left(1-q^{2n}\right)^{3}$$

Et dans le membre de droite:

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{+\infty}\left[\left(1+q^{4n-1}\right)\left(1+q^{4n-3}\right)\left(1-q^{4n}\right)\right]&=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+q^{2n-1}\right)\left(1-q^{4n}\right)\\&=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1+q^{2n-1}\right)\left(1-q^{2n-1}\right)}{\left(1-q^{2n-1}\right)}\left(1-q^{4n}\right)\\&=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1-q^{4n-2}}{1-q^{2n-1}}\left(1-q^{4n}\right)\end{aligned}$$

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left[\left(1+q^{4n-1}\right)\left(1+q^{4n-3}\right)\left(1-q^{4n}\right)\right]=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}$$

Donc (c) devient :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n-1}\right)^{3}\left(1-q^{2n}\right)^{3}=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\times\left\{1-4\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{q^{4n+1}}{1+q^{4n+1}}-\frac{q^{4n+3}}{1+q^{4n+3}}\right)\right\}$$

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n-1}\right)^{4}\left(1-q^{2n}\right)^{2}=1-4\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{q^{4n+1}}{1+q^{4n+1}}-\frac{q^{4n+3}}{1+q^{4n+3}}\right)$$

Or dans la formule du triple produit de Jacobi :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{n}q^{n^{2}}=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+aq^{2n-1}\right)\left(1+a^{-1}q^{2n-1}\right)\left(1-q^{2n}\right)$$

En remplaçant

a par -1 on obtient :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n-1}\right)\left(1-q^{2n-1}\right)\left(1-q^{2n}\right)$$

En élevant au carré on obtient :

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2}\right)^2 = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n-1}\right)^4\left(1-q^{2n}\right)^2$$

De sorte que l'on a :

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2}\right)^2 = 1-4\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{q^{4n+1}}{1+q^{4n+1}}-\frac{q^{4n+3}}{1+q^{4n+3}}\right)$$

IV-2 Théorème des quatre carrés.

Théorème 6 : *Le nombre de représentations de n comme somme de quatre carrés est huit fois le nombre de diviseurs de n non multiples de 4 :*

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}q^{n^2}\right]^4 = 1+8\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{nq^n}{1-q^n}-\frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}}\right]$$

IV-2-1 Preuve du théorème des quatre carrés par l'équation des ondes. [D]

Dans cette preuve :

i. On introduit la fonction théta3 d'Euler et on prouve qu'elle satisfait à l'équation de la chaleur.

ii. On réécrit cette équation en utilisant le triple produit de Jacobi.

iii. On transforme l'égalité par des opérations élémentaires.

iv. On retrouve le carré de l'expression du théorème des deux carrés.

i. On introduit la fonction théta3 d'Euler : $\theta_3(q,x) := \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x^n q^{n^2}$.

Et on définit l'opérateur d'Euler D_x par : $D_x = x\frac{d}{dx}$, ce qui vérifie $D_x(x^k) = kx^k$ pour tout k. De même, et c'est différent de l), on pose $D_q = q\frac{d}{dq}$.

D'où $D_x^2\theta_3(q,x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} n^2 x^n q^{n^2}$ et de même $D_q\theta_3(q,x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} n^2 x^n q^{n^2}$

Proposition 18 : *la fonction $\theta_3(q,x)$ vérifie l'équation de la chaleur :*

$$D_x^2\theta_3(q,x) = D_q\theta_3(q,x)$$

ii. Écrivons l'équation de la chaleur en utilisant l'expression de $\theta_3(q,x)$ comme produit, on a l'égalité due au triple produit de Jacobi:

$$\theta_3(q,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} x^n = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+xq^{2n-1}\right)\left(1+x^{-1}q^{2n-1}\right)$$

Pour calculer les différentiels en x et en q il est plus commode d'utiliser les dérivées logarithmiques, et on a :

$$D_x\theta_3(q,x) = \theta_3(q,x)\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{xq^{2n-1}}{1+xq^{2n-1}} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{-1}q^{2n-1}}{1+x^{-1}q^{2n-1}}\right]$$

En remarquant que, pour une fonction ψ dérivable:

$$D_x\theta_3(q,x) = \theta_3(q,x)\psi \Rightarrow D_x^2\theta_3(q,x) = \left(D_x\theta_3(q,x)\right)\psi(x) + \theta_3(q,x)\psi'(x)$$

$$D_x^2\theta_3(q,x) = \theta_3^2(q,x)\psi + \theta_3(q,x)\psi'(x)$$

On différencie une seconde fois par rapport à x :

$$D_x^2\theta_3(q,x) = \theta_3(q,x)\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{xq^{2n-1}}{1+xq^{2n-1}} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{-1}q^{2n-1}}{1+x^{-1}q^{2n-1}}\right]^2 + \cdots$$

$$\cdots\theta_3(q,x)\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x\left(q^{2n-1}\left(1+xq^{2n-1}\right)-q^{2n-1}xq^{2n-1}\right)}{\left(1+xq^{2n-1}\right)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x\left(x^{-2}q^{2n-1}\left(1+x^{-1}q^{2n-1}\right)\right)}{\left(1+x^{-1}q^{2n-1}\right)^2}\right]$$

$$D_x^2\theta_3(q,x)=\theta_3(q,x)\left[\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{xq^{2n-1}}{1+xq^{2n-1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{-1}q^{2n-1}}{1+x^{-1}q^{2n-1}}\right]^2+\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{xq^{2n-1}}{\left(1+xq^{2n-1}\right)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{-1}q^{2n-1}}{\left(1+x^{-1}q^{2n-1}\right)^2}\right]\right]$$

De plus on a aussi :

$$D_q\theta_3(q,x)=\theta_3(q,x)\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\left(2nq^{2n}\right)}{1-q^{2n}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x(2n-1)q^{2n}}{1+xq^{2n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)x^{-1}q^{2n-1}}{1+x^{-1}q^{2n-1}}\right]$$

L'équation de la chaleur donne donc, en simplifiant par $\theta_3(q,x)$:

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{xq^{2n-1}}{1+xq^{2n-1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{-1}q^{2n-1}}{1+x^{-1}q^{2n-1}}\right]^2+\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{xq^{2n-1}}{\left(1+xq^{2n-1}\right)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{-1}q^{2n-1}}{\left(1+x^{-1}q^{2n-1}\right)^2}\right]=\cdots$$

$$\cdots\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\left(2nq^{2n}\right)}{1-q^{2n}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x(2n-1)q^{2n}}{1+xq^{2n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)x^{-1}q^{2n-1}}{1+x^{-1}q^{2n-1}}\right]$$

iii. En effectuant les changements de variables suivants : on remplace q par q^2 et x par –q on obtient :

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-q)q^{4n-2}}{1+(-q)q^{4n-2}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{4n-2}/(-q)}{1+(-q)q^{4n-2}}\right]^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-q)q^{4n-2}}{\left(1+(-q)q^{4n-2}\right)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{4n-2}/(-q)}{\left(1+\frac{1}{(-q)}q^{4n-2}\right)^2}=\cdots$$

$$\cdots\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\left(2nq^{4n}\right)}{1-q^{4n}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-q)(2n-1)q^{4n}}{1+(-q)q^{4n-2}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(-q)}\frac{(2n-1)q^{4n-2}}{1+\frac{1}{(-q)}q^{4n-2}}\right]$$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\left(q^{4n-1}\right)}{1-q^{4n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}\right]^2-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{4n-1}}{\left(1-q^{4n-1}\right)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{4n-3}}{\left(1-q^{4n-3}\right)^2}=\cdots$$

$$\cdots\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2nq^{4n}}{1-q^{4n}}\right)-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}$$

On obtient enfin la relation $(*)$:

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\left(q^{4n-1}\right)}{1-q^{4n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}\right]^2=\cdots$$

$$\cdots\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{q^{4n-1}}{\left(1-q^{4n-1}\right)^2}+\frac{q^{4n-3}}{\left(1-q^{4n-3}\right)^2}\right]-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2nq^{4n}}{1-q^{4n}}-\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}\right]$$

On va simplifier cette expression en remarquant tout d'abord que dans le membre de gauche et dans la première partie du membre de droite on peut effectuer les changements suivants:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{q^{4n-1}}{\left(1-q^{4n-1}\right)^2}+\frac{q^{4n-3}}{\left(1-q^{4n-3}\right)^2}\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n}{\left(1-q^n\right)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{2n}}{\left(1-q^{2n}\right)^2}$$

Et
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}-\frac{q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}\right]=\left(-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right)$$

On obtient donc la relation $(*)^1$ **:**

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right]^2=\cdots$$

$$\cdots\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n}{\left(1-q^n\right)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{2n}}{\left(1-q^{2n}\right)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2nq^{4n}}{1-q^{4n}}-\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}\right]$$

Dans la dernière partie du membre de droite on remarque, en regroupant les termes en $4n-1$ et $4n-3$ en les termes en $2n+1$, que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{(4n-2)q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{(4n-2)q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(4n-1)q^{4n-1}-q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(4n-3)q^{4n-3}+q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(4n-1)q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(4n-3)q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(4n-1)q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}+\frac{(4n-3)q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}\right]-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}-\frac{q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}$$

On obtient donc $(*)^{\mathbf{2}}$:

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right]^2=\cdots$$

$$\cdots\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n}{\left(1-q^n\right)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{2n}}{\left(1-q^{2n}\right)^2}\right]-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2nq^{4n}}{1-q^{4n}}-\left[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right]$$

On utilise enfin le fait que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n}{\left(1-q^n\right)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}$

En effet : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n}{\left(1-q^n\right)^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}q^n\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{n(k-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{nk}$.

La série double $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}k|q|^{nk}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|q|^n}{\left(1-|q|^n\right)^2}$ est convergente, l'interversion des deux sommations en n et k est donc légitime, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n}{\left(1-q^n\right)^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}k\sum_{n=1}^{+\infty}\left(q^k\right)^n=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{kq^k}{1-q^k}$$

On obtient en utilisant cette égalité dans l'expression $(*)^{\mathbf{2}}$:

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right]^2 = \cdots$$

$$\cdots\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right]-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2nq^{4n}}{1-q^{4n}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}$$

En réagençant les termes :

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right]^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2nq^{2n}}{1-q^{2n}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2nq^{4n}}{1-q^{4n}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right]^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}-\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2nq^{2n}}{1-q^{2n}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right]-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2nq^{4n}}{1-q^{4n}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right]^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}-\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}\right]-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right]^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}$$

En regroupant les termes $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}$ du même côté de l'égalité on obtient :

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right]^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{nq^n}{1-q^n}-\frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}}\right]$$

Or pour a et b qui satisfont la relation: $a^2+\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}b$, on a :

$$\begin{aligned} & 16a^2+8a=8b \\ \Leftrightarrow\quad & 1+16a^2+8a=1+8b \\ \Leftrightarrow\quad & (1+4a)^2=1+8b \end{aligned}$$

iv. On trouve donc l'expression suivante $(*)^{\mathbf{3}}$:

$$\left[1+4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right]^2=1+8\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{nq^n}{1-q^n}-\frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}}\right]$$

Or le théorème sur la somme de deux carrés vu plus haut dit que :

$$\left[\sum_{n-\infty 1}^{+\infty}q^{n^2}\right]^2=1+4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q^{4n+1}}{1-q^{4n+1}}-4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q^{4n+3}}{1-q^{4n+3}}$$

$$\left[\sum_{n-\infty 1}^{+\infty}q^{n^2}\right]^2=1+4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}$$

On a donc en remplaçant dans $(*)^{\mathbf{3}}$ l'égalité trouvée ci-dessus **:**

$$\left[\left[\sum_{n-\infty 1}^{+\infty}q^{n^2}\right]^2\right]^2=1+8\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{nq^n}{1-q^n}-\frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}}\right]$$

D'où :

$$\underline{\left[\sum_{n-\infty 1}^{+\infty}q^{n^2}\right]^4=1+8\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{nq^n}{1-q^n}-\frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}}\right]}$$

IV-2-2 Preuve du théorème des quatre carrés par Andrews, Ekhad et Zeilberger. [AEZ]

Les formules proposées dans cette preuve par les auteurs semblent miraculeuses : ce sont, d'après eux des cas particuliers de formules plus générales « classiques » (exemple : le théorème de Jackson).

Dans cette preuve :

i. On vérifie les identités finies (a) et (b) définies plus loin.

ii. On passe à la limite : (a) donne une expression de $\left(\sum q^{k^2}\right)^4$ et (b) donne une expression de $\left(\sum q^{k^2}\right)^1$.

iii. On développe en série entière et on explicite le coefficient du terme q^n.

On introduit les fonctions :

$$H_n = H_n(q) = \frac{1+q}{1-q}\frac{1+q^2}{1-q^2}\cdots\frac{1+q^n}{1-q^n},\ \forall n \geq 0$$

Proposition 19 : *On a pour tout n :*

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{4(-q)^k}{\left(1+q^k\right)^2} H_n^2 H_{n+k} H_{n-k} = 1 \qquad (a)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2\left(-q^{n+1}\right)^k}{1+q^k}\frac{H_k}{H_n} = \sum_{k=-n}^{n} (-q)^{k^2} \qquad (b)$$

i. Soient $L_1(n)$ (respectivement $L_2(n)$) le membre de gauche de (a) (respectivement (b)) et soient $F_1(n,k)$ et $F_2(n,k)$ les termes respectifs de chaque somme. On construit de plus les fonctions $G_1(n,k)$ et $G_2(n,k)$ telles que :

$$G_1(n,k) := \frac{q^{n-k+1}\left(1+q^{2n+2}\right)\left(1+q^k\right)^2\left(1+q^{n+k+1}\right)}{\left(1-q^{n+1}\right)^3\left(1-q^{n+k+1}\right)\left(1+q^{n+1}\right)} F_1(n,k)$$

$$G_2(n,k) := \frac{\left(-q^{n+1}\right)\left(1+q^k\right)}{\left(1+q^{n+1}\right)} F_2(n,k)$$

On pose $F_i(n,k) = 0$ pour $k \in \mathbb{Z}$ si $|k| > n$.

Lemme 4 : *Ces fonctions satisfont les formules de récurrence suivantes*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et* $k \in \mathbb{Z}$:

$F_1(n+1,k) - F_1(n,k) = G_1(n,k) - G_1(n,k-1)$ *et* $F_2(n+1,k) - F_2(n,k) = G_2(n,k) - G_2(n,k-1)$

On a en effet, pour $-n \le k \le n$:

- $F_1(n+1,k) = F_1(n,k) \times \left(\dfrac{1+q^{n+1}}{1-q^{n+1}}\right)^2 \left(\dfrac{1+q^{n+k+1}}{1-q^{n+k+1}}\right)\left(\dfrac{1+q^{n-k+1}}{1-q^{n-k+1}}\right)$

De sorte que :

$$\frac{F_1(n+1,k)-F_1(n,k)}{F_1(n,k)} = \frac{\left(1+q^{n+1}\right)^2\left(1+q^{n+k+1}\right)\left(1+q^{n-k+1}\right)-\left(1-q^{n+1}\right)^2\left(1-q^{n+k+1}\right)\left(1-q^{n-k+1}\right)}{\left(1-q^{n+1}\right)^2\left(1-q^{n+k+1}\right)\left(1-q^{n-k+1}\right)}$$

$$\frac{F_1(n+1,k)-F_1(n,k)}{F_1(n,k)} = \frac{2\left(q^{n+k+1}+q^{n-k+1}+q^{3n+k+3}+q^{3n-k+3}+2q^{3n+3}+2q^{n+1}\right)}{\left(1-q^{n+1}\right)^2\left(1-q^{n+k+1}\right)\left(1-q^{n-k+1}\right)}$$

- $F_1(n,k-1) = F_1(n,k) \times \dfrac{\left(1+q^{k}\right)^2}{-q}\left(\dfrac{1-q^{n+k}}{1+q^{n+k}}\right)\left(\dfrac{1+q^{n-k+1}}{1-q^{n-k+1}}\right)$

D'où : $$\frac{G_1(n,k-1)}{F_1(n,k)} = \frac{q^{n-h+2}\left(1+q^{2n+2}\right)\left(1+q^{k-1}\right)^2\left(1+q^{n+k}\right)}{\left(1-q^{n+1}\right)^3\left(1-q^{n+k}\right)\left(1+q^{n+1}\right)} \times \frac{\left(1+q^{k}\right)\left(1-q^{n+k}\right)\left(1+q^{n-k+1}\right)}{(-q)\left(1+q^{n+k}\right)\left(1-q^{n-k+1}\right)}$$

$$\frac{G_1(n,k-1)}{F_1(n,k)} = -\left(\frac{q^{n-h+2}\left(1+q^{2n+2}\right)}{\left(1-q^{n+1}\right)^3\left(1+q^{n+1}\right)} \times \frac{\left(1+q^{k}\right)\left(1+q^{n-k+1}\right)}{\left(1-q^{n-k+1}\right)}\right)$$

De sorte que :

$$\frac{G_1(n,k)-G_1(n,k-1)}{F_1(n,k)} = \left[\frac{q^{n-k+1}\left(1+q^{2n+2}\right)\left(1+q^{k}\right)^2\left(1+q^{n+k+1}\right)}{\left(1-q^{n+1}\right)^3\left(1-q^{n+k+1}\right)\left(1+q^{n+1}\right)} - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots \frac{q^{n-h+2}\left(1+q^{2n+2}\right)}{\left(1-q^{n+1}\right)^3\left(1+q^{n+1}\right)} \times \frac{\left(1+q^{k}\right)\left(1+q^{n-k+1}\right)}{\left(1-q^{n-k+1}\right)}\right]$$

$$G_1(n,k)-G_1(n,k-1) = \frac{F_1(n,k)q^{n-k+1}\left(1+q^{2n+2}\right)\left(1+q^{k}\right)^2}{\left(1-q^{n+1}\right)^2\left(1-q^{n+k+1}\right)\left(1-q^{n-k+1}\right)} \times \left[\frac{\left(1+q^{n+k+1}\right)\left(1-q^{n-k+1}\right)}{\left(1-q^{n+1}\right)\left(1+q^{n+1}\right)} + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots \frac{\left(1+q^{n-k+1}\right)\left(1-q^{n+k+1}\right)}{\left(1-q^{n+1}\right)\left(1+q^{n+1}\right)}\right]$$

$$G_1(n,k)-G_1(n,k-1)=\frac{F_1(n,k)}{\left(1-q^{n+1}\right)^2\left(1-q^{n+k+1}\right)\left(1-q^{n-k+1}\right)}\times\cdots$$

$$\cdots\left[\frac{\left(q^{n-k+1}+q^{3n-k+3}\right)\left(1+2q^{k}+q^{2k}\right)\left(1+q^{n+k+1}-q^{n-k+1}-q^{2n+2}+1+q^{n-k+1}-q^{n+k+1}-q^{2n+2}\right)}{1-q^{2n+2}}\right]$$

$$G_1(n,k)-G_1(n,k-1)=\frac{F_1(n,k)}{\left(1-q^{n+1}\right)^2\left(1-q^{n+k+1}\right)\left(1-q^{n-k+1}\right)}\times\cdots$$

$$\cdots\left[\frac{\left(q^{n-k+1}+q^{3n-k+3}+2q^{n+1}+2q^{3n+3}+q^{n+k+1}+q^{3n+k+3}\right)\times 2\left(1-q^{2n+2}\right)}{1-q^{2n+2}}\right]$$

$$G_1(n,k)-G_1(n,k-1)=F_1(n,k)\times\frac{2\left(q^{n-k+1}+q^{3n-k+3}+2q^{n+1}+2q^{3n+3}+q^{n+k+1}+q^{3n+k+3}\right)}{\left(1-q^{n+1}\right)^2\left(1-q^{n+k+1}\right)\left(1-q^{n-k+1}\right)}$$

De sorte que $\quad F_1(n+1,k)-F_1(n,k)=G_1(n,k)-G_1(n,k-1)$

De plus on a :

- $F_2(n+1,k)=F_2(n,k)\dfrac{\left(-q^{n+2}\right)^k\left(1-q^{n+1}\right)}{\left(-q^{n+1}\right)^k\left(1+q^{n+1}\right)}=F_2(n,k)q^k\,\dfrac{1-q^{n+1}}{1+q^{n+1}}$

D'où $\quad F_2(n+1,k)-F_2(n,k)=F_2(n,k)\left[q^k\,\dfrac{1-q^{n+1}}{1+q^{n+1}}-1\right]=F_2(n,k)\left[\dfrac{q^k-q^{n+k+1}-1-q^{n+1}}{1+q^{n+1}}\right]$

- $F_2(n,k-1)=F_2(n,k)\dfrac{\left(-q^{n+1}\right)\left(1+q^{k-1}\right)\left(1-q^{k}\right)}{\left(1+q^{n+1}\right)\left(-q^{n+1}\right)\left(1+q^{k-1}\right)}$

$$G_2(n,k)-G_2(n,k-1)=F_2(n,k)\left[\frac{(-q)^{n+1}(1+q^k)}{1+q^{n+1}}-\frac{(-q^{n+1})(1+q^{k-1})(1-q^k)}{(1+q^{n+1})(-q^{n+1})(1+q^{k-1})}\right]$$

$$=F_2(n,k)\left[\frac{(-q)^{n+1}(1+q^k)-(1-q^k)}{1+q^{n+1}}\right]$$

$$G_2(n,k)-G_2(n,k-1)=F_2(n,k)\left[\frac{-(q^{n+1})-q^{n+k+1}-1+q^k}{1+q^{n+1}}\right]$$

De sorte que : $F_2(n+1,k)-F_2(n,k)=G_2(n,k)-G_2(n,k-1)$.

En sommant $F_1(n+1,k)-F_1(n,k)=G_1(n,k)-G_1(n,k-1)$ de k=-n-1 à k=n+1 et $F_2(n+1,k)-F_2(n,k)=G_2(n,k)-G_2(n,k-1)$de k=0 à k=n+1on trouve les égalités :

$$\sum_{k=-n}^{n}\frac{4(-q)^k}{(1+q^k)^2}H_n^2H_{n+k}H_{n-k}=1 \qquad (a)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2(-q^{n+1})^k}{1+q^k}\frac{H_k}{H_n}=\sum_{k=-n}^{n}(-q)^{k^2} \qquad (b)$$

ii. - On divise les deux côtés l'égalité (a) par H_n^4, et on fait tendre n vers l'infini, on obtient :

Comme k est fixé, il y a un nombre fini de termes, qui tendent tous vers 1 lorsque n tend vers l'infini, la permutation des symboles somme et limite est donc justifiée, on a:

$$\sum_{k=-n}^{n}\frac{4(-q)^k}{(1+q^k)^2}H_n^{-2}H_{n+k}H_{n-k}=H_n^{-4}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{4(-q)^k}{(1+q^k)^2}H_n^{-2}H_{n+k}H_{n-k}=H_{+\infty}^{-4}$$

Et $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}\frac{4(-q)^k}{(1+q^k)^2}H_n^{-2}H_{n+k}H_{n-k}=\cdots$

$$\cdots\sum_{k=-n}^{n}\frac{4(-q)^k}{(1+q^k)^2}\frac{(1-q)^2\cdots(1-q^n)^2}{(1+q)^2\cdots(1+q^n)^2}\times\frac{(1+q)\cdots(1+q^{n+k})}{(1-q)\cdots(1-q^{n+k})}\times\frac{(1+q)\cdots(1+q^{n-k})}{(1-q)\cdots(1-q^{n-k})}$$

$$\cdots\sum_{k=-n}^{n}\frac{4(-q)^k}{(1+q^k)^2}\times\frac{(1+q^{n+1})\cdots(1+q^{n+k})}{(1-q^{n+1})\cdots(1-q^{n+k})}\times\frac{(1+q^{n+1})\cdots(1+q^{n-k})}{(1-q^{n+1})\cdots(1-q^{n-k})}$$

D'où :
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{4(-q)^k}{(1+q^k)^2}H_n^{-2}H_{n+k}H_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{4(-q)^k}{(1+q^k)^2}H_n^{-2}H_{n+k}H_{n-k}\right)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{4(-q)^k}{(1+q^k)^2}$$
$$= 1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4(-q)^k}{(1+q^k)^2}+\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{4(-q)^k}{(1+q^k)^2}$$
$$= 1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4(-q)^k}{(1+q^k)^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4(q)^{k^2}}{(-q)^k(q^k+1)^2}$$
$$= 1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4(-q)^k}{(1+q^k)^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4(-q)^k}{(1+q^k)^2}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{4(-q)^k}{(1+q^k)^2}H_n^{-2}H_{n+k}H_{n-k} = 1+8\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-q)^k}{(1+q^k)^2}$$

- On fait tendre n vers l'infini dans l'égalité (b):

On a :
$$\sum_{k=-n}^{n}(-q)^{k^2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{2(-q^{n+1})^k}{1+q^k}\frac{H_k}{H_n} = H_n^{-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{2(-q^{n+1})^k}{1+q^k}H_k$$

Dans le terme de droite :
$$\lim_{n\to\infty}\left(H_n^{-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{2(-q^{n+1})^k}{1+q^k}H_k\right) = H_\infty^{-1}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2(-q^{n+1})^k}{1+q^k}H_k$$

Pour k fixé :

pour $k \neq 0$, $q<1$: le terme sommé tend vers 0.

pour $k=0$, le terme sommé vaut 1.

Et donc :
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2(-q^{n+1})^k}{1+q^k}H_k = 1$$

On a donc :
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-q)^{k^2} = H_\infty^{-1}.$$

Il vient : $$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-q)^{k^2}\right)^4=1+8\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-q)^k}{\left(1+q^k\right)^2}$$

On effectue le changement : $-q\to q$, on obtient :

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}q^{k^2}\right)^4=1+8\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^k}{\left(1+(-q)^k\right)^2}\qquad (c)$$

iii. On développe en série entière le terme de droite et on pose $n=rk$:

$$1+8\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^k}{\left(1+(-q)^k\right)^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{r=1}^{+\infty}(-1)^{(k+1)(r+1)}rq^{rk}$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}q^n\left[\sum_{r|n}^{+\infty}(-1)^{\left(\frac{n}{r}+1\right)(r+1)}r\right]$$

Le coefficient de « r » vaut :

- (-1) lorsque r et $\dfrac{n}{r}$ sont pairs, autrement dit lorsque n est congru à 0 modulo4.
- 1 sinon.

On a donc en remarquant que $(-1)=+1-2$, et en posant dans la seconde somme $d=2r$:

$$\sum_{r|n}(-1)^{\left(\frac{n}{r}+1\right)(r+1)}r=\sum_{r|n}r-2\sum_{\substack{r|n\\ r\text{ et }\frac{n}{r}\text{ pairs}}}r=\sum_{d|n}d-\sum_{\substack{d|n\\ 4|d}}d$$

En reportant cette égalité dans (c) il vient :

$$\underline{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}q^{k^2}\right)^4=1+8\left(\sum_{d|n}d-\sum_{\substack{d|n\\ 4|d}}d\right).}$$

Nous avons vu quelques applications du triple produit de Jacobi, cet outil d'analyse nous a permis de prouver des résultats d'arithmétique et de combinatoire, qui peuvent se poursuivre par exemple par l'étude des nombreuses identités de Ramanujan.

BIBLIOGRAPHIE :

[AEZ] : E.Andrews, B.Ekhad, D.Zeilberger, A short proof of Jacobi's formula for the number of representations of an integer as a sum of four squares.

[D] : D.Duverney, Théorie des Nombres, Cours et exercices corrigés, Dunod, Collection Second Cycle (Novembre 1998).

[He]: Y.Hellegouarch, Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles.

[Hi] : M.D.Hirschhorn, Jacobi's two square theorem and related identities.

[KC] : Kac-Cheung, Quantum Calculus, Springer.

[R] : W.Rudin, Real and Complex Analysis, Masson