

Polyèdres platoniciens

Unicité et existence

Emmanuelle Curatolo
Encadrement : Jérôme Germoni

2007
Licence 2ème année
Université Claude Bernard - Lyon 1

Remerciements

Je remercie Philippe Caldero pour m'avoir permis de faire ce travail et Jérôme Germoni qui m'a si bien encadrée, y consacrant ainsi beaucoup de temps.

À mon fils David

Texte écrit grâce à
L^AT_EX

Table des matières

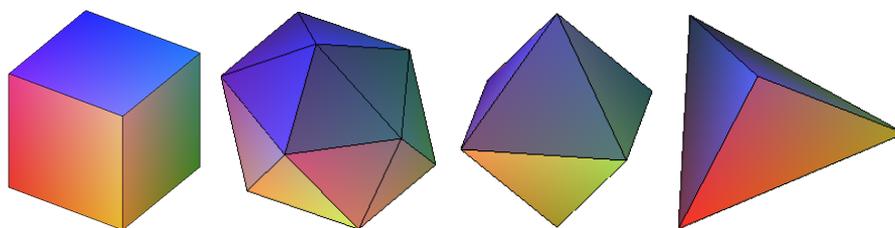
0.1	Introduction - Mise en bouche	5
1	Analyse et trigonométrie. Approche empirique des polyèdres	8
1.1	Définitions et premières propriétés	9
1.1.1	<i>Convexité</i>	9
1.1.2	<i>Polygones, polyèdres</i>	12
1.2	Contraintes numériques des polyèdres	13
1.2.1	<i>Formule d'Euler</i>	13
1.2.2	<i>Contraintes numériques des polyèdres réguliers</i>	14
2	Isométries des espaces vectoriels euclidiens. Vers une approche abstraite des polyèdres	16
2.1	Isométries, matrices orthogonales et groupe orthogonal	17
2.2	Isométries vectorielles d'un plan euclidien	19
2.3	Isométries vectorielles d'un espace euclidien (dimension 3)	22
2.3.1	<i>Etude des matrices de $\mathcal{O}(3)$</i>	22
2.3.2	<i>Endomorphismes et matrices symétriques</i>	23
2.3.3	<i>Description géométrique des isométries de $\mathcal{O}(E)$</i>	26
3	Sous-groupes finis de $\mathcal{SO}(3)$ et groupes polyédraux	30
3.1	Polyèdres réguliers : définitions et quelques propriétés générales	31
3.2	Équation caractéristique et signature	33
3.2.1	<i>Formule des classes et de Burnside</i>	33
3.2.2	<i>Équation caractéristique, signature</i>	34
3.2.3	<i>Résolution de l'équation caractéristique</i>	35
3.3	Sous-groupes finis de $\mathcal{SO}(3)$	36
3.3.1	<i>Séries infinies</i>	36
3.3.2	<i>Groupes symétriques</i>	37
3.4	Groupes polyédraux : présentation par générateurs et relations	39
3.4.1	<i>Préliminaires</i>	39
3.4.2	<i>Groupes diédraux finis</i>	40
3.4.3	<i>Groupes polyédraux</i>	40
4	Annexes	44
4.1	Projections stéréographiques d'un icosaèdre	45
4.1.1	<i>Introduction</i>	45
4.1.2	<i>Projections de l'icosaèdre (dessins)</i>	46
4.1.3	<i>Lignes de code : logiciel Maple</i>	47

4.2	Angles invariants dans un polyèdre	50
4.3	Bibliographie	52

0.1 Introduction - Mise en bouche

Lorsque Platon décrit la formation du monde par le démiurge dans son *Timée* [PLA1, 27c-69a]¹, il suit l'héritage métaphysique pythagoricien. En bon pythagoricien, Platon tire de cette éducation une philosophie mathématique, c'est-à-dire qu'il « s'efforce de trouver aux mathématiques un fondement qui garantisse la légitimité de leurs principes [...]. C'est à partir de ce fondement qu'il entreprend de déduire les structures de l'Univers physique, qui sont mathématiques. »[CAV, p.7]

Les corps du monde sensible, contrairement à ceux du monde céleste, sont composés d'éléments (on dirait de nos jours 'particules') que sont la terre, l'eau, l'air et le feu. Ces éléments sont² (respectivement) les polyèdres convexes réguliers cube, icosaèdre, octaèdre et tétraèdre [PLA1, 53c-56e].



Voici le cube, l'icosaèdre, l'octaèdre, le tétraèdre...

Ces trois derniers ayant des faces identiques (*i.e.* des triangles équilatéraux), ils peuvent géométriquement et physiquement muter selon leurs faces suivant des équivalences strictes fixées par Platon : 10 particules de feu éq. 5 particules d'air éq. 2 particules d'eau. La terre ayant des faces carrées ne peut se transmuter en les trois précédents éléments mais seulement s'y fragmenter ou s'y délayer.

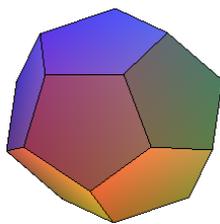
Le carré et le triangle équilatéral sont hétérogènes : en effet, le carré se divise à l'infini en triangles scalènes égaux et le triangle équilatéral se divise à l'infini, quant à lui, en triangles équilatéraux. Dès lors, on peut dire que les particules sont formées de triangles, la particule ultime et irréductible. Dans ce schéma, le fini et l'infini s'entrecroisent : ces triangles peuvent être construits de forme invariable, quelle que soit l'échelle de grandeur, et il en est de même des polyèdres.

Quant au dodécaèdre, forme la plus proche de la sphère, il est sûrement réservé au mystérieux cinquième élément, l'éther [PLA1, 55C] [PLA2, 991c7]. Et Platon d'affirmer alors qu'il y a cinq polyèdres³ et seulement cinq.

1. Les références bibliographiques sont faites entre crochets dans le corps du texte et renvoient à la bibliographie qui se trouve à la fin de ce mémoire.

2. Cela signifie qu'ils *sont* réellement. Ontologiquement, les objets mathématiques existent pour Platon, ils ne sont pas une construction de l'esprit. C'est une pensée sûrement due à son éducation pythagoricienne.

3. Il s'agit ici, bien sûr, des polyèdres (convexes) réguliers, aussi dénommés 'platoniciens' pour des raisons évidentes.



... et le dodécaèdre.

Mais il faudra attendre un siècle pour qu'Euclide, dans ses *Éléments*, systématise de manière hypothético-déductive et plus rigoureuse les mathématiques, et donc la géométrie, qui l'ont précédé. C'est dans le livre XIII de ses *Éléments* (le dernier livre!) qu'il offrira description et construction des solides platoniciens. De surcroît, il donnera une démonstration, faisant défaut à Platon, qu'il en existe cinq et seulement cinq.

D'un point de vue épistémologique, Platon nous a posé au moins trois problèmes dans son *Timée*. Le premier est physique : peut-on dire que les particules sont composées de triangles ou de polyèdres ? Évidemment, la physique fondamentale contemporaine nous dira que non. Même si l'Atomium est un cube, on sait de nos jours que les particules élémentaires ne sont pas des polyèdres platoniciens. Néanmoins, à une échelle moins microscopique, les cristaux, eux, ont parfois une structure qui est un polyèdre convexe régulier. Par exemple, le réseau hexagonal compact est un octaèdre étoilé qui forme un cube (il suffit d'entasser des oranges en excentrant les couches pour le remarquer⁴). D'ailleurs, les groupes polyédraux font partie des groupes cristallographiques. On se rapproche du réel ; Platon n'avait peut-être pas tout à fait tort...

Les deuxième et troisième problèmes épistémologiques sont l'unicité et l'existence mathématique de ces polyèdres réguliers. Si Platon en était convaincu, il ne nous en a pas donné la preuve. Euclide, quant à lui, nous l'a presque fait parvenir. Cependant, même si la méthode hypothético-déductive est en route, il s'agit plus de démonstrations que de démonstrations que l'on trouve dans ses *Éléments*. Il faudra en passer par Descartes puis Euler pour atteindre la rigueur requise. Et c'est cela qui va nous préoccuper. Le premier chapitre sera consacré à l'analyse et à la trigonométrie pour une approche empirique des problèmes de l'unicité puis de l'existence des solides platoniciens. Ensuite, on s'intéressera aux préliminaires (appartenant à l'algèbre linéaire) qui permettront d'arriver enfin à la troisième partie, consacrée aux groupes polyédraux présentés par générateurs et relations.

Ainsi on montrera l'unicité et l'existence des polyèdres réguliers grâce à deux approches : l'une empirique et l'autre abstraite⁵. Plus précisément, dans la section 1 on se penchera sur la notion analytique de convexité qui permettra de définir les polyèdres comme le sens commun, *i.e.* en manipulant des objets du monde sensible.

4. Voir aussi la première page de l'annexe.

5. On remarque que cette démarche pourrait s'appliquer, comme chez Coxeter [COX], à des polyèdres de dimension supérieure à trois, ou aux diverses manières d'étoiler un polyèdre.

La section 2 est consacrée à la formule d'Euler⁶ et aux contraintes numériques qu'elle induit. Cela permet de classer les polyèdres réguliers, c'est-à-dire de démontrer qu'il ne peut y en avoir que cinq. On ne démontrera pas l'existence, car de ce point de vue, il suffirait, par exemple, d'un calcul de coordonnées (ce qui peut aisément se faire avec un logiciel informatique) ou de les construire explicitement (mais pour cela, on renvoie au livre XIII des *Éléments* d'Euclide).

On arrive maintenant au deuxième chapitre, préliminaire au troisième. Dans ce chapitre, constitué des sections 3 à 5, on étudiera les isométries des espaces euclidiens puisqu'on verra qu'un polyèdre a pour groupe de symétrie ces isométries-là⁷.

Enfin, le troisième chapitre sera consacré à l'étude de ces groupes de symétries qui sont les groupes polyédraux. On commencera en section 6 par donner des définitions et propriétés algébriques des polyèdres réguliers, sous réserve, toujours, qu'ils existent. Dans la section 7, on s'intéressera à l'équation caractéristique qui permettra, après résolution, de déterminer combien de groupes d'isométries sont possibles. La section 8 sera une classification de ces groupes et on verra qu'il y a trois groupes polyédraux (pour cinq polyèdres) que l'on décrira. Voilà pour le problème de l'unicité. Reste l'existence, qui sera démontrée en section 9.

En annexe sont présentées des représentations de projections stéréographiques d'icosaèdres, juste pour le côté esthétique de ces projections, ainsi qu'une recherche des angles invariants des cinq polyèdres. Cette annexe est réalisée avec le logiciel Maple⁸.

6. On ne reprendra pas la célèbre démonstration de Cauchy, que l'on retrouve chez Hadamard [HAD], à cause des problèmes qui découlent de cette preuve. Pour plus de précisions, voir Lakatos [LAK].

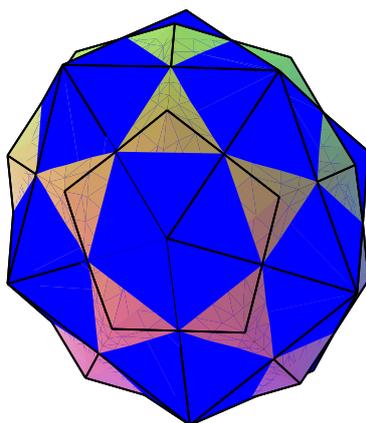
7. On peut aussi regarder les choses sous cet angle : dire que les polyèdres sont une représentation des groupes d'isométries de l'espace à trois dimensions.

8. MaplesoftTM.

Chapitre 1

Analyse et trigonométrie.

Approche empirique des polyèdres



1

1. L'icosaèdre et son dual, le dodécaèdre, inscrits dans une même sphère. Réalisé avec Maple.

1.1 Définitions et premières propriétés

1.1.1 Convexité

Soit E un espace affine réel de dimension n finie.

Définition 1 - Une partie non vide d'un espace affine réel est dite **convexe** si elle contient tout segment $[AB]$ dont elle contient les extrémités A et B .

Le barycentre à coefficients positifs de toutes les parties finies d'un convexe est une combinaison affine qu'on appelle **combinaison convexe**.

Remarque 1 - (i) Un convexe contient toutes les combinaisons convexes de ses parties.

(ii) Toute intersection de parties convexes est convexe.

Définition 2 - Pour \mathcal{P} partie de E , on appellera **enveloppe convexe**, notée $\text{Conv}(\mathcal{P})$, l'intersection de tous les convexes contenant \mathcal{P} .

Lemme 1 - (i) $\text{Conv}(\mathcal{P})$ est le plus petit convexe contenant \mathcal{P} .

(ii) $\text{Conv}(\mathcal{P})$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des points de \mathcal{P} .

Preuve - (i) C'est clair d'après la définition précédente.

(ii) Soit \mathcal{C} l'ensemble des combinaisons convexes de \mathcal{P} . Alors, par associativité du barycentre, \mathcal{C} est convexe. Donc $\text{Conv}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{C}$. Et par la remarque 1.(i), on a $\mathcal{C} \subset \text{Conv}(\mathcal{P})$. \square

Théorème 1 - Tout point de l'enveloppe convexe $\text{Conv}(\mathcal{P})$, où \mathcal{P} est une partie d'un espace affine de dimension n , est combinaison convexe d'au plus $n + 1$ points de \mathcal{P} .

Preuve - Soit E un espace affine de dimension n . Soit $\mathcal{P} \subset E$. On fixe $O \in E$. Soit $M \in \text{Conv}(\mathcal{P})$, alors $\overrightarrow{OM} = \sum_1^q \lambda_k \overrightarrow{OA_k}$, avec $\sum_1^q \lambda_k = 1$ ($1 \leq k \leq q$, $0 \leq \lambda_k \leq 1$) et $A_k \in \mathcal{P}$. On suppose $q > n + 1$ et q minimal. Alors les A_k sont affinement liés. Donc il existe des scalaires μ_k ($1 \leq k \leq q$) non tous nuls tels que $\sum_1^q \mu_k \overrightarrow{OA_k} = 0$ et $\sum_1^q \mu_k = 0$.

Par suite, on peut supposer que l'un au moins des μ_k est strictement positif. Soit $\nu = \inf\{\frac{\lambda_k}{\mu_k}; 1 \leq k \leq q \text{ et } \mu_k > 0\}$. On pose $\delta_k = \lambda_k - \nu\mu_k$. Alors $\forall k \in \{1, 2, \dots, q\}$, $\delta_k \geq 0$ et $\sum_1^q \delta_k = 1$. On a alors $\overrightarrow{OM} = \sum_1^q \delta_k \overrightarrow{OA_k}$. Puisque l'un au moins des δ_k est nul, M est combinaison convexe de $q - 1$ points de \mathcal{P} , ce qui contredit la minimalité de q . D'où $q \leq n + 1$. \square

A partir de maintenant, E est un espace euclidien de dimension n finie.

Théorème 2 - Si \mathcal{C} est un convexe fermé non vide d'un espace euclidien E et A un point de E en dehors de \mathcal{C} , il existe un unique point H de \mathcal{C} tel que $AH = d(A, \mathcal{C}) = \inf\{AM, M \in \mathcal{C}\}$.

Preuve - Existence : Soit \mathcal{B} une boule fermée de centre A et de rayon $r > d(A, \mathcal{C})$. Alors $I = \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ et I compact. La fonction continue $M \mapsto AM$ atteint son minimum en un point H tel que $AH = d(A, \mathcal{C})$.

Unicité : On procède par l'absurde : soit H' ($H' \neq H$) de \mathcal{C} tel que $AH' = d(A, \mathcal{C})$. On en déduit $AH' = AH$. Alors HAH' est isocèle de sommet A . On note P le milieu de $[HH']$. On a donc par l'égalité de la médiane $AH^2 + AH'^2 = 2AP^2 + HH'^2/2$, $AP < AH = AH' = d(A, \mathcal{C})$ et par définition d'un convexe : $P \in \mathcal{C}$. Absurde! \square

Définition 3 - Le point H du théorème 2 est appelé le **projeté** de A sur le convexe fermé \mathcal{C} .

Définition 4 - Si \mathcal{C} est un convexe d'un espace affine, un **hyperplan d'appui** de \mathcal{C} est un hyperplan qui rencontre \mathcal{C} et qui délimite un demi-espace fermé contenant \mathcal{C} .

Théorème 3 - En tout point de la frontière d'un convexe fermé \mathcal{C} , il passe un hyperplan d'appui.

Notation 1 - Pour \mathcal{C} convexe, on note :

- $\bar{\mathcal{C}}$ son adhérence, i.e. le plus grand fermé contenu dans \mathcal{C} ;
- $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ son intérieur, i.e. le plus grand ouvert contenu dans \mathcal{C} ;
- $\text{Fr } \mathcal{C}$ sa frontière, i.e. par définition $\text{Fr } \mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{C}}$.

Pour x, y deux points d'un espace E , on note $d(x, y)$ la distance entre x et y . On note \mathcal{V}_x et \mathcal{V}_y leurs voisinages respectifs.

Pour un réel strictement positif ρ , on note $\mathcal{B}'_\rho(y)$ la boule ouverte de centre y et de rayon ρ .

Enfin, on note $\text{pr}(x)$ la projection orthogonale de x sur l'ensemble \mathcal{C} .

Preuve du théorème - Soit \mathcal{C} un convexe fermé d'un espace E et \mathcal{H} un hyperplan d'appui de \mathcal{C} .

1. On montre que \mathcal{H} rencontre la frontière $\text{Fr } \mathcal{C}$ de \mathcal{C} et pas $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$.

On va montrer que $\mathcal{H} \cap \overset{\circ}{\mathcal{C}} = \emptyset$ par l'absurde. On suppose qu'il existe un élément y dans $\mathcal{H} \cap \overset{\circ}{\mathcal{C}}$. Comme $y \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$, il existe $\rho > 0$ tel que il existe $\mathcal{B} = \mathcal{B}'_\rho(y) \subset \mathcal{C}$; et tout élément de \mathcal{B} appartient à \mathcal{C} .

Il existe y_1 et y_2 dans \mathcal{B} et \mathcal{V}_{y_1} et \mathcal{V}_{y_2} des voisinages contenus dans \mathcal{B} tels que $\mathcal{V}_{y_1} \cap \mathcal{V}_{y_2} = \emptyset$, puisque l'espace est séparé, et tels que \mathcal{H} sépare les deux points. Ces deux points y_1 et y_2 de \mathcal{C} appartiennent à deux demi-espaces ouverts de frontières différentes, ce qui contredit l'hypothèse que \mathcal{H} est un hyperplan d'appui.

Donc \mathcal{H} rencontre $\bar{\mathcal{C}} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{C}} = \text{Fr } \mathcal{C}$.

2. On montre que pour chaque point x de $\text{Fr } \mathcal{C}$, il existe un tel hyperplan d'appui \mathcal{H}_x .

Pour tout $x \in E \setminus \mathcal{C}$, $\text{pr}(x) \in \text{Fr } \mathcal{C}$. En effet, pr est une surjection sur $\text{Fr } \mathcal{C}$ car $y \in \text{Fr } \mathcal{C}$ est sa propre image. On peut alors trouver $x \in I$ tel que $d(x, y) = d(x, \mathcal{C})$, i.e. $\text{pr}(x) = y$.

On considère $\mathcal{P}_{x,y}$, qui est le plan orthogonal à (xy) en y . Alors $\mathcal{P}_{x,y}$ est un plan d'appui de \mathcal{C} car si un point $z \in \mathcal{C}$ était dans le demi-espace ouvert contenant x , par

convexité on aurait $[yz] \subset \mathcal{C}$ et, comme $d(x, [yz]) < d(x, y)$, cela contredirait le fait que l'on a $d(x, y) = d(x, \mathcal{C})$. \square

Corollaire 1 - *Le convexe fermé \mathcal{C} est l'intersection des demi-espaces fermés délimités par les hyperplans d'appui.*

Définition 5 - *On appellera **point extrémal** du convexe \mathcal{C} tout point $A \in \mathcal{C}$ tel que $\mathcal{C} \setminus \{A\}$ est convexe, i.e. un point qui n'est pas à l'intérieur d'un segment non réduit à un point contenu dans \mathcal{C} .*

Notation 2 - *On notera $\text{Extr}(\mathcal{C})$ l'ensemble des points extrémaux du convexe \mathcal{C} .*

Définition 6 - *Un point **exposé** d'un convexe \mathcal{C} est un point qui est l'intersection de \mathcal{C} avec un hyperplan d'appui. Un **sommet** d'un convexe \mathcal{C} est un point qui est le seul point d'intersection de tous les hyperplans d'appui passant par ce point.*

Théorème 4 - *Un convexe compact d'un espace affine de dimension finie est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Preuve - Soit \mathcal{C} un convexe compact et n la dimension de la variété affine \mathcal{E} qu'il engendre.

Comme $\mathcal{C} = \text{Conv}(\text{Fr } \mathcal{C})$, il suffit de montrer $\text{Fr } \mathcal{C} \subset \text{Conv}(\text{Extr } \mathcal{C})$. Soit $A \in \text{Fr } \mathcal{C}$, \mathcal{H} un hyperplan d'appui en A et \mathcal{H}^+ le demi-espace ouvert délimité par \mathcal{H} et ne contenant pas \mathcal{C} . Il est évident que $\text{Extr}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{H} \subset \text{Extr}(\mathcal{C} \cap \mathcal{H})$.

Inversement, si $M \in \text{Extr}(\mathcal{C} \cap \mathcal{H})$, alors M est de la forme $M = \lambda P + (1 - \lambda)Q$, avec P et Q dans \mathcal{C} , $\lambda \in]0; 1[$ et P et Q ne sont pas dans \mathcal{H}^+ (sinon on aurait $M \in \mathcal{H}^+$, ce qui est absurde). P et Q sont donc dans $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}$. Comme M est extrémal dans $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}$, on a $P = Q = M$. Il suit $M \in \text{Extr } \mathcal{C} \cap \mathcal{H}$ et donc $\text{Extr } \mathcal{C} \cap \mathcal{H} = \text{Extr}(\mathcal{C} \cap \mathcal{H})$.

En ce qui concerne $A \in \text{Fr } \mathcal{C}$: $A \in \mathcal{C} \cap \mathcal{H} = \text{Conv}(\text{Extr}(\mathcal{C} \cap \mathcal{H})) = \text{Conv}(\text{Extr } \mathcal{C} \cap \mathcal{H}) \subset \text{Conv}(\text{Extr } \mathcal{C})$. \square

Définition 7 - *Une **facette** d'un convexe \mathcal{C} est une partie convexe \mathcal{F} de \mathcal{C} telle que tout point de \mathcal{F} n'est pas intérieur à un segment contenu dans \mathcal{C} et dont les extrémités ne sont pas dans \mathcal{F} :*

$$\forall (M, P, Q) \in \mathcal{F} \times \mathcal{C}^2, (\exists \lambda \in]0; 1[; M = \lambda P + (1 - \lambda)Q) \implies (P, Q) \in \mathcal{F}^2.$$

La dimension d'une telle facette est la dimension de la variété affine qu'elle engendre.

Remarque 2 - *Toute facette de dimension $q \leq n - 1$ (avec n la dimension de \mathcal{C}) est contenue dans un hyperplan d'appui ainsi que dans la frontière de \mathcal{C} . Si le convexe est fermé, sa frontière est alors réunion des facettes de dimensions inférieures à $n - 1$.*

1.1.2 Polygones, polyèdres

Définition 8 - On appelle **polytope** l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

Définition 9 - Soit E un espace affine. On appelle **polyèdre convexe** de E tout polytope d'intérieur non vide.

Remarque 3 - Un **polyèdre convexe de dimension** n est, par définition, l'intersection, d'intérieur non vide, d'un nombre fini de demi-espaces de dimension n . Il existe alors une famille minimale de demi-espaces dont il est l'intersection (elle est unique) : les hyperplans les délimitant rencontrent le polyèdre selon des $(n - 1)$ -facettes appelées **faces**. Chaque $(n - k)$ -facette d'un polyèdre est l'intersection de k faces ; les 0-facettes sont les points extrémaux ou **sommets** qui sont en nombre fini.

Définition 10 - On appelle **n -simplexe** de E tout polyèdre convexe enveloppe convexe de $n + 1$ points de E affinement indépendants, i.e. de points formant un repère affine de E .

Désormais, l'espace ambiant est de dimension 3.

Définition 11 - 1. Sur une sphère \mathcal{S} , une **demi-sphère** est une partie fermée délimitée par un grand cercle Γ (intersection de \mathcal{S} avec un demi-espace délimité par un plan passant par 0).

2. On appellera **polygone sphérique convexe** une intersection non vide de demi-sphères ; ses **côtés** sont les arcs des grands cercles le délimitant, ses **sommets** sont les extrémités de ces arcs ; ses **angles** sont les angles géométriques des côtés (i.e. l'angle géométrique des demi-tangentes à ces arcs en les sommets).

3. Si on a 2 côtés, c'est un **secteur sphérique** et si on a 3 côtés, un **triangle sphérique**.

4. Un **polygone sphérique régulier** est un polygone sphérique à n côtés qui est conservé par un groupe cyclique de n rotations de l'espace. Ses côtés sont isométriques, ses angles sont tous égaux.

Définition 12 - On appellera **polyèdre sphérique** sur une sphère \mathcal{S} la donnée d'un ensemble fini de polygones sphériques convexes (appelés **faces**) recouvrant \mathcal{S} de sorte que l'intersection de deux quelconques est soit vide, soit réunion de sommets et de côtés ; ces derniers sont appelés respectivement les **sommets** et **arêtes** du polyèdre (une arête appartient à deux faces).

1.2 Contraintes numériques des polyèdres

1.2.1 Formule d'Euler

Lemme 2 - Sur une sphère \mathcal{S} de rayon R , l'aire géométrique d'un secteur sphérique d'angle α est $2\alpha R^2$ et l'aire géométrique d'un triangle sphérique \mathcal{T} d'angles α, β, γ est égale à :

$$\mathcal{A}(\mathcal{T}) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2.$$

Preuve - Soit \mathcal{S} une sphère de rayon R . On fixe T un triangle sur \mathcal{S} et on nomme A, B, C ses sommets. On appelle \mathcal{S}' la demi-sphère de \mathcal{S} contenant T et délimitée par le grand cercle contenant A et B . On sait que l'aire $\mathcal{A}(\mathcal{S}')$ de \mathcal{S}' vaut $\mathcal{A}(\mathcal{S}') = 2\pi R^2$.

On note A' le point diamétralement opposé à A , B' celui à B , soit $A' = -A$ et $B' = -B$. Puis $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$ et $\widehat{ACB} = \gamma$. On pose : $T = ABC$, $T_A = A'BC$, $T_B = AB'C$, $T_C = A'B'C$. Le secteur sphérique $T \cup T_A$ a pour aire $\mathcal{A}(T \cup T_A) = \mathcal{A}(T) + \mathcal{A}(T_A) = 2\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{\pi} = 2\alpha R^2$. De même, on a : $\mathcal{A}(T \cup T_B) = \mathcal{A}(T) + \mathcal{A}(T_B) = 2\beta R^2$, et en remarquant que $T \cup -T_C$ est un secteur sphérique, on obtient : $\mathcal{A}(T \cup T_C) = \mathcal{A}(T \cup -T_C) = \mathcal{A}(T) + \mathcal{A}(T_C) = 2\gamma R^2$.

Par suite,

$$\begin{aligned} 2\alpha R^2 &= \mathcal{A}(T) + \mathcal{A}(T_A) \\ + 2\beta R^2 &= \mathcal{A}(T) + \mathcal{A}(T_B) \\ + 2\gamma R^2 &= \mathcal{A}(T) + \mathcal{A}(T_C) \end{aligned}$$

donne : $2R^2(\alpha + \beta + \gamma) = 3\mathcal{A}(T) + \mathcal{A}(T_A) + \mathcal{A}(T_B) + \mathcal{A}(T_C)$.

Si on soustrait à cela $2R^2\pi = \mathcal{A}(T) + \mathcal{A}(T_A) + \mathcal{A}(T_B) + \mathcal{A}(T_C)$, on obtient : $2R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = 2\mathcal{A}(T)$, soit $\mathcal{A}(T) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$. \square

Corollaire 2 - L'aire d'un polygone sphérique convexe \mathcal{P}_n à n côtés, d'angles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, est :

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_n) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi \right) R^2.$$

Esquisse de preuve - Il suffit de découper le polygone sphérique en triangles et d'appliquer le lemme 2. \square

Théorème 5 - Si s, a, f désignent respectivement les nombres de sommets, arêtes et faces d'un polyèdre sphérique, on a :

$$s - a + f = 2.$$

Preuve - Soit P un polyèdre sphérique (de sphère circonscrite \mathcal{S}) de s sommets, a arêtes et f faces. En chaque sommet, la somme des angles est 2π . Donc la somme de tous les angles des polygones faces du polyèdre est $\sigma = 2\pi s$.

Soit f_k une face à n_k côtés ($1 \leq k \leq f$). D'après le corollaire précédent, la somme de ses angles est $\sigma_{f_k} = \frac{\mathcal{A}(f_k)}{R^2} + (n_k - 2)\pi$. La somme totale des angles de toutes les faces est donc $\sigma = \frac{1}{R^2} \sum_k \mathcal{A}(f_k) + (\sum_1^f (n_k - 2))\pi$.

Comme $\cup_1^f f_k = \mathcal{S}$, $\sum_1^f n_k = 2a$ (car chaque arête appartient à 2 faces) et cette somme vaut : $\sigma = \frac{A(\mathcal{S})}{R^2} + (2a - 2f)\pi$.

Par ailleurs, $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = 4\pi R^2$, donc $2\pi s = 4\pi + (2a - 2f)\pi$, i.e. $s = 2 + a - f$; d'où la formule. \square

1.2.2 Contraintes numériques des polyèdres réguliers

Définition 13 - On appellera **polyèdre régulier** tout polyèdre convexe dont toutes les faces sont des polygones réguliers et identiques. De plus, on impose que chacun de ses sommets possède le même nombre de faces et d'arêtes.

Théorème 6 de classification - Dans un espace vectoriel euclidien il n'existe que 5 polyèdres réguliers :

- le tétraèdre (4 faces),
- l'hexaèdre ou cube (6 faces),
- l'octaèdre (8 faces),
- le dodécaèdre (12 faces),
- l'icosaèdre (20 faces).

Les triplets (f, a, s) , où f est le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et s le nombre de faces d'un polyèdre régulier P ne peuvent être que : $(4, 6, 4)$, $(6, 12, 8)$, $(8, 12, 6)$, $(12, 30, 20)$, $(20, 30, 12)$.

Preuve - Soit P un polyèdre régulier d'un espace euclidien E .

Soit f son nombre de faces, a son nombre d'arêtes et s son nombre de sommets. Comme P est régulier, chaque face possède le même nombre m arêtes. Donc mf est le nombre total d'arêtes. Et comme chaque arête rencontre exactement deux faces, on a : $mf = 2a$. Soit n le nombre des arêtes qui se rencontrent en chaque sommet. Puisque chaque arête relie deux sommets, on a aussi : $mf = ns$.

De la formule d'Euler, on tire :

$$\frac{2a}{m} - a + \frac{2a}{n} = 2$$

et alors

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2} > 2.$$

Les nombres m et n sont évidemment tous deux au moins égaux à 3. On en déduit que les seuls cas possibles pour les couples (m, n) sont :

$$(m, n) = \{(3, 3); (3, 4); (4, 3); (3, 5); (5, 3)\}.$$

Par ailleurs, $f - a + s = 2 = f - \frac{mf}{2} + \frac{mf}{n} = f(1 - \frac{m}{2} + \frac{m}{n})$. D'où : $f = \frac{4n}{2n - mn + 2m}$.

On peut alors classer les polyèdres comme suit :

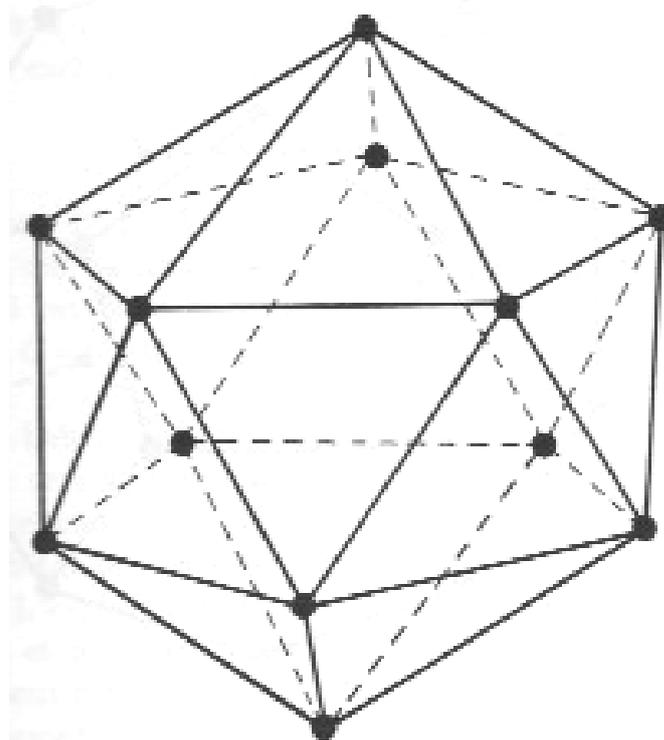
- **Tétraèdre** $(3,3)$: $f = \frac{12}{6-9+6} = 4$, $a = \frac{mf}{2} = \frac{12}{2} = 6$, $s = \frac{mf}{n} = \frac{12}{3} = 4$.

- Hexaèdre (4,3) : $f = \frac{12}{6-12+8} = 6$, $a = \frac{24}{2} = 12$, $s = \frac{24}{3} = 8$.
- Octaèdre (3,4) : $f = \frac{4 \cdot 4}{8-12+6} = 8$, $a = \frac{24}{2} = 12$, $s = \frac{24}{4} = 6$.
- Dodécaèdre (5,3) : $f = \frac{12}{6-15+30} = 12$, $a = \frac{60}{2} = 30$, $s = \frac{60}{3} = 20$.
- Icosaèdre (3,5) : $f = \frac{20}{10-15+6} = 20$, $a = \frac{60}{2} = 30$, $s = \frac{60}{5} = 12$. \square

Définition 14 - Pour chaque polyèdre, le couple (m, n) de la preuve précédente est appelé son **symbole de Schläfli**.

Chapitre 2

Isométries des espaces vectoriels euclidiens. Vers une approche abstraite des polyèdres



1

1. C'est un graphe étalé d'icosaèdre, tiré de [ARN].

2.1 Isométries, matrices orthogonales et groupe orthogonal

Définition 15 - Soient E et F deux espaces vectoriels euclidiens, munis de leurs produits scalaires $(\cdot|\cdot)$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On dira que φ est une **isométrie** si elle conserve le produit scalaire : $\forall (u, v) \in E^2, (\varphi(u)|\varphi(v)) = (u|v)$.

Remarque 4 - Une telle application φ conserve alors la norme $\|\cdot\|$ induite par le produit scalaire et par là la distance $d : (u, v) \mapsto \|u - v\|$ induite par la norme :

$$(i) \forall u \in E, \|\varphi(u)\| = \|u\|.$$

$$(ii) \forall (u, v) \in E^2, d(\varphi(u), \varphi(v)) = d(u, v).$$

Proposition 1 - Une application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$ entre deux espaces euclidiens de même dimension n est une isométrie si, et seulement si, elle transforme une base orthonormée quelconque en une base orthonormée. Et il suffit que ce soit vrai pour une base orthonormée donnée.

Preuve - Soient E et F deux espaces vectoriels euclidiens de même dimension n . On considère $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ qui transforme une base orthonormée $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ en une base orthonormée $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Soient x et y dans E de composantes respectives (x_1, x_2, \dots, x_n) et (y_1, y_2, \dots, y_n) dans la base \mathcal{E} . Par hypothèse, $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ dans F sont de composantes respectives (x_1, x_2, \dots, x_n) et (y_1, y_2, \dots, y_n) dans la base \mathcal{F} . De plus, $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ et $(\varphi(x)|\varphi(y)) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$.

Donc φ conserve le produit scalaire.

Réciproquement, soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n , soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée quelconque de E , et soit φ une isométrie de $\mathcal{L}(E, F)$.

Par définition, pour tous (i, j) de $\{1, 2, \dots, n\}^2$, on a : $(\varphi(e_i)|\varphi(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{ij}$. Les $(\varphi(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ sont deux à deux orthogonaux donc c'est une famille libre de F . Et comme $\dim F = n$, c'est une famille libre maximale ; donc une base orthonormée de F .

Le dernier point en résulte par "aller-retour". \square

Proposition 2 - Soient E et F deux espaces vectoriels euclidiens. Alors une application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$ est une isométrie si, et seulement si, sa matrice dans des bases orthonormées vérifie ${}^tMM = I_n$, où I_n est la matrice unité de dimension n .

Preuve - Soit φ une application orthogonale de E dans F . On fixe une base orthonormée \mathcal{E} de E et une base orthonormée \mathcal{F} de F , et on note M la matrice de φ dans les bases \mathcal{E} et \mathcal{F} . Soient $(x, y) \in E^2$ dont les composantes sont représentées par les vecteurs colonnes X et Y dans la base \mathcal{E} . Les produits scalaires $(x|y)$ et $(\varphi(x)|\varphi(y))$ s'écrivent respectivement sous forme matricielle tXY et ${}^t(MX)(MY)$, on a par hypothèse : ${}^t(MX)(MY) = {}^tXY$, i.e. ${}^tX({}^tMM)Y = {}^tXY$. En prenant X

(resp. Y) le i -ème (resp. le j -ème) vecteur de la base standard de \mathbb{R}^n , on constate que les coefficients (i, j) de tMM et de I_n sont égaux. D'où : ${}^tMM = I_n$. \square

Définition 16 - On appellera **matrice orthogonale** une matrice M satisfaisant ${}^tMM = I_n$.

Proposition 3 - L'ensemble $\mathcal{O}(n)$ des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication matricielle.

Preuve - La matrice $\text{Id}_n \in \mathcal{O}(n)$ donc $\mathcal{O}(n)$ est non vide. Soient A et B dans $\mathcal{O}(n)$. Alors $B^{-1} = {}^tB$ d'après la preuve de la proposition précédente. Par ailleurs, ${}^t(AB^{-1})(AB^{-1}) = {}^tB^{-1}{}^tAAB^{-1} = {}^tB^{-1}B^{-1} = (B^tB)^{-1} = I_n$. Par conséquent, $AB^{-1} \in \mathcal{O}(n)$. \square

Définition 17 - On appellera **groupe orthogonal d'ordre n** le groupe $\mathcal{O}(n)$.

Proposition 4 - L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries d'un espace vectoriel euclidien de dimension n est un groupe pour la composition ; il est isomorphe à $\mathcal{O}(n)$.

Preuve - Soit E un espace vectoriel euclidien. On fixe \mathcal{B} une base orthonormée de E . Alors l'application qui associe à chaque isométrie sa matrice dans la base \mathcal{B} est un isomorphisme. \square

Définition 18 - On appellera **groupe orthogonal de E** le groupe $\mathcal{O}(E)$.

Proposition 5 - Deux espaces vectoriels euclidiens E et F de même dimension n sont isométriques ; et on a $\mathcal{O}(E) \simeq \mathcal{O}(F)$.

Preuve - *i)* Soient E et F deux espaces vectoriels euclidiens de même dimension n . Soient $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base orthonormée de F . Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ définie par $\varphi(e_i) = (f_i)$ ($1 \leq i \leq n$). Alors φ est une isométrie car $(\varphi(e_i)|\varphi(e_j)) = (f_i|f_j) = \delta_{ij} = (e_i|e_j)$.

ii) Soit $f : \mathcal{O}(E) \rightarrow \mathcal{O}(F)$ telle que $f(\sigma) = \varphi\sigma\varphi^{-1}$: c'est clairement un isomorphisme. \square

Définition 19 - Soient E un espace vectoriel euclidien, et soit $\varphi \in \mathcal{O}(E)$. Alors φ est **directe** si elle conserve l'orientation (i.e. $\det \varphi > 0$) ; **indirecte** si elle l'inverse.

Proposition 6 - Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit $\varphi \in \mathcal{O}(E)$, alors $\det \varphi = \pm 1$.

Preuve - Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit \mathcal{B} une base orthonormée de E . Soit $\varphi \in \mathcal{O}(E)$. On note M sa matrice dans la base \mathcal{B} .

Comme on a ${}^tMM = I_n$ (proposition (3.4)), $\det({}^tMM) = \det I_n = 1$. D'autre part, $\det({}^tMM) = \det({}^tM) \det M$ et $\det({}^tM) = \det M = \det \varphi$ entraînent : $(\det \varphi)^2 = 1$. Comme on est dans \mathbb{R} , $\det \varphi = \pm 1$ \square

Remarque 5 - Si une telle isométrie φ est directe, alors son déterminant vaut 1 ; -1 sinon.

Définition 20 - On considère le morphisme de groupes $\det : \mathcal{O}(n) \rightarrow \{-1; 1\}$ et on pose $\ker(\det) = \mathcal{SO}(n)$. Par définition, c'est un sous-groupe de $\mathcal{O}(n)$. On appellera **groupe spécial orthogonal d'ordre n** le groupe $\mathcal{SO}(n)$. Pour tout espace vectoriel euclidien de dimension n , on définit de même le **groupe spécial orthogonal de E** , sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$, et noté $\mathcal{SO}(E)$.

2.2 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Pour cette section, on considère P un plan vectoriel euclidien orienté et on fixe $\mathcal{B} = (u, v)$ une base orthonormée de P .

Proposition 7 - Le groupe $\mathcal{SO}(2)$ est décrit par :

$$\mathcal{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{O}(2) \setminus \mathcal{SO}(2)$ est décrit par :

$$\mathcal{O}(2) \setminus \mathcal{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

Preuve - Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

$$M \in \mathcal{SO}(2) \Leftrightarrow {}^tMM = \text{Id} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases} . \text{ D'où } a^2c^2 = b^2d^2, \text{ i.e. : } (1-b^2)c^2 =$$

$b^2(1-c^2)$.

Si $b^2 = 0$, alors $c^2 = 0$.

Si $b \neq 0$, alors $\frac{1}{b^2} - 1 = \frac{1}{c^2} - 1$ puis $b^2 = c^2$, i.e. $b = \pm c$.

Ensuite, $a^2 = 1 - b^2 = 1 - c^2 = d^2$. D'où $a = \pm d$. On a alors : $a = \varepsilon d$ et $b = \varepsilon' c$, avec $\varepsilon, \varepsilon'$ dans $\{-1; 1\}$.

Par ailleurs, $ac + bd = 0$ implique $(\varepsilon + \varepsilon')ab = 0$, soit $\varepsilon = -\varepsilon'$. Donc : $M = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$.

Or on sait que $\det M = \varepsilon$. D'où la proposition. \square

Théorème 7 - Pour tous $a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1$, il existe un unique θ modulo 2π tel que $\cos \theta = a$ et $\sin \theta = b$.

Preuve - Existence : $0 \leq a^2 = 1 - b^2 \leq 1$ d'où $a \in [0; 1]$ et donc $\exists! \theta_1 \in [0; \pi]$; $a = \cos \theta_1$.

$b^2 = 1 - a^2 = 1 - \cos^2 \theta_1 = \sin^2 \theta_1$. Si $b = \sin \theta_1$, alors $\theta = \theta_1$ convient; si $b = -\sin \theta_1$, alors $\theta = -\theta_1$ convient.

Unicité : On suppose que θ et θ' conviennent. $(\sin \theta = b = \sin \theta')$ donne $(\theta' \equiv \theta[2\pi]$ ou $\theta' \equiv \pi - \theta[2\pi])$. D'autre part, $(\cos \theta = a = \cos \theta')$ entraîne $(|\theta| = |\theta'|)$. Donc $\theta = \theta'$. \square

Lemme 3 - L'application $\phi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{SO}(2)$, $\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de groupes.

Preuve - On remarque que ϕ est bien définie; car \cos et \sin sont 2π -périodiques sur \mathbb{R} .

Morphisme : Soient θ et α dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Alors

$$\phi(\theta+\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) & -\sin(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) & \cos(\theta+\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \phi(\theta)\phi(\alpha).$$

Bijection : On voit clairement d'après les propriétés bien connues de \sin et \cos que l'application ϕ est surjective. Soit $\theta \in \ker \phi$. Alors $\phi(\theta) = I_2$ (où I_2 est la matrice identité de dimension 2), soit $\theta \equiv 0[2\pi]$ et donc $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Finalement, ϕ est bien un isomorphisme de groupes. \square

Remarque 6 - Soient $M, M' \in \mathcal{SO}(2)$ telles que M et M' sont semblables. Alors il existe $P \in \mathcal{SO}(2)$ telle que $M' = PMP^{-1}$. Mais comme $\mathcal{SO}(2)$ est abélien, $M' = M$. Donc pour $\varphi \in \mathcal{SO}(P)$ et \mathcal{B} une base orthonormée de \mathcal{P} , si $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ dans $\mathcal{SO}(2)$, alors pour toute base \mathcal{B}' orthonormée de même orientation que \mathcal{B} de \mathcal{P} , $M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = M$.

Lemme 4 - Tout sous-groupe de \mathbb{R} est monogène ou dense.

Preuve - Soit G un sous-groupe de \mathbb{R} , on note $G^+ = G \cap \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha = \inf G^+$. On suppose G non trivial.

i) On montre que α existe. Soit $x \in G$; $x \neq 0$. Si $x > 0$ alors $x \in G^+$, sinon $-x \in G^+$. Ainsi, G^+ est une partie non vide de \mathbb{R} . Par ailleurs, 0 minore G^+ . Donc, d'après le théorème de la borne inférieure, G^+ admet une borne inférieure $\alpha \geq 0$.

ii) *Cas 1* : $\alpha > 0$. On va montrer que dans ce cas G est monogène. Pour ce faire, il faut d'abord montrer que $\alpha \in G$. On procède par l'absurde. On suppose $\alpha \notin G$. On prend $\beta \in G$; $\alpha < \beta < 2\alpha$. Un tel β existe puisque $2\alpha > \alpha$ et 2α non minorant de G^+ . De la même manière, comme β n'est pas un minorant de G^+ dans \mathbb{R} , il existe $\gamma \in G$; $\alpha < \gamma < \beta$. Alors, d'une part $\beta - \gamma \in G^+$; d'autre part : $\alpha < \gamma < \beta < 2\alpha \Rightarrow \beta - \gamma < \alpha$. Absurde! Donc $\alpha \in G$. Et comme G est un groupe, on en déduit immédiatement par définition que $\langle \alpha \rangle = \alpha\mathbb{Z} \subseteq G$.

Maintenant, on veut : $G \subseteq \alpha\mathbb{Z}$. Soit $x \in G$; on pose $n = [\frac{x}{\alpha}]$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière. On a : $n \leq \frac{x}{\alpha} < n + 1$, ou encore $n\alpha \leq x < (n + 1)\alpha$. D'où $0 \leq x - n\alpha < \alpha$; tous ces termes étant dans G .

On suppose $x \neq n\alpha$. Alors $x - n\alpha \in G^+$, donc $\alpha < x - n\alpha$. Mais d'après (*), $0 \leq x - n\alpha < n\alpha + \alpha - n\alpha = \alpha$. Contradiction. Donc $x = n\alpha$. Par suite $G \in \alpha\mathbb{Z} = \langle \alpha \rangle$, d'où $G = \langle \alpha \rangle$.

iii) *Cas 2* : $\alpha = 0$. On va montrer que dans ce cas G est dense. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ (dans \mathbb{R}). On considère l'intervalle de \mathbb{R} : $I =]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$. Comme $\inf G^+ = 0$, il existe $x \in G$; $0 < x < \varepsilon$. On pose $n = \lfloor \frac{a}{x} \rfloor$. Comme précédemment, on a : $nx \leq a < (n+1)x$. Et $\varepsilon > 0 \implies nx < a + \varepsilon$. D'autre part, $a - \varepsilon < (n+1)x - \varepsilon = nx + x - \varepsilon < nx$. Donc $xn \in I$.

Comme $xn \in G$, on en déduit que chaque intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point contient un élément de G . Ce qui signifie que G est dense dans \mathbb{R} . \square

Corollaire 3 - *Tout sous-groupe fini de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est monogène (et donc cyclique), engendré par la classe d'un élément de la forme $2\pi/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).*

Preuve - Soit H un sous-groupe fini de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et soit $G = \pi^{-1}(H)$ (où $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est la surjection canonique).

On sait que G est un sous-groupe de \mathbb{R} . Il est donc, en vertu de la proposition précédente, soit dense dans \mathbb{R} , soit monogène. On suppose G dense dans \mathbb{R} . On pose une bijection $\varphi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow U$ (où U est le cercle unité).

Soit $\bar{\theta} \in U$, $\theta \in \mathbb{R}$ relevant $\bar{\theta}$; on fixe (α_n) une suite d'éléments de G qui converge vers θ . Alors $\begin{pmatrix} \cos \alpha_n \\ \sin \alpha_n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ dans U . Donc $\varphi(\pi(G))$ est dense dans le cercle U , donc infini, donc $\pi(G) = H$ aussi infini. Contradiction ! Donc G est monogène et comme H est image homomorphe de G , H est monogène.

Soit g un générateur de G ; on a alors $\pi(g) = \bar{g}$ générateur de H . Comme H est fini, soit $n \in \mathbb{N}^*$ l'ordre (fini) de \bar{g} dans H (et donc $|H| = n$). Il suit : $n\bar{g} = \bar{0}$. D'où $ng \in 2\pi\mathbb{Z}$, i.e. $g \in (2\pi/n)\mathbb{Z}$. L'élément g étant un représentant de sa classe d'équivalence modulo $2\pi/n$, on obtient finalement le résultat souhaité. \square

Lemme 5 - *Tout sous-groupe fini de $\mathcal{SO}(2)$ est monogène, engendré par la rotation d'angle $2\pi/n$, où n est le cardinal du groupe.*

Preuve - C'est un corollaire de ce qui précède. \square

Définition 21 - *On appellera une telle isométrie ρ une **rotation vectorielle** (ou simplement **rotation** s'il n'y a pas de confusion possible). Son **angle** est le θ défini dans le théorème précédent.*

Lemme 6 - *Un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(2)$ qui n'est pas contenu dans $\mathcal{SO}(2)$ est engendré par une rotation ρ d'angle $2\pi/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et une réflexion σ satisfaisant $\sigma\rho\sigma = \rho^{-1}$; il est isomorphe à un produit semi-direct $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Preuve - Soit H un sous-groupe de $\mathcal{O}(2)$ qui n'est pas contenu dans $\mathcal{SO}(2)$. On pose $H^+ = H \cap \mathcal{SO}(2)$.

1. On considère le morphisme $\det : H \rightarrow \{-1; 1\}$. Comme $\ker(\det) = H^+$, d'après le premier théorème d'isomorphisme, $H/H^+ \simeq \{-1; 1\}$. Ce qui entraîne $[H : H^+] = |\{-1; 1\}| = 2$. On en déduit que $H^+ \triangleleft H$.

2. On fixe une rotation ρ engendrant H^+ ; $o(\rho) = |H^+| = n$ (où $o(\rho)$ désigne l'ordre fini de ρ). On fixe une réflexion $\sigma \in H \setminus H^+$. On a $\det(\sigma\rho) = -1$; donc $\sigma\rho$ est une réflexion. Une réflexion étant involutive, on a : $(\sigma\rho)^2 = Id_H$, soit $\sigma\rho\sigma\rho = Id_H$, ou encore $\sigma\rho\sigma = \rho^{-1}$. Comme σ est une involution, on a finalement : $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1}$. Donc $\langle\sigma\rangle$ opère par conjugaison sur H^+ ; l'action γ est donnée par $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1}$.

3. On considère $H^+\sigma = \{\rho^k\sigma, k = 0, \dots, n-1\}$. Comme H^+ et $H^+\sigma$ forment une partition de H , chaque élément de H s'écrit comme composé d'une rotation (puissance de ρ) et de la symétrie σ ; par conséquent, $H = \langle\rho, \sigma\rangle = H^+ \cup H^+\sigma$.

4. On reconnaît la définition d'un produit semi-direct dans ce qui précède; et donc : $H = H^+ \rtimes \langle\sigma\rangle$. De plus, $H^+ \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donne $H \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. \square

NB : On reverra ce groupe dans la partie consacrée aux générateurs et relations.

2.3 Isométries vectorielles d'un espace euclidien (dimension 3)

2.3.1 Etude des matrices de $\mathcal{O}(3)$

Pour cette section, on considère E un espace vectoriel euclidien de dimension 3.

Proposition 8 - *Les valeurs propres complexes d'une isométrie de $\mathcal{O}(E)$ sont de module 1. En particulier, 1 ou -1 est valeur propre d'une telle application.*

Preuve - Pour $X, Y \in \mathbb{C}^3$, ${}^t\overline{X}Y = (X|Y)$ (produit scalaire de X et Y).

Si $M \in \mathcal{O}(3)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de M , il existe un vecteur propre $X \in \mathbb{C}^3$ ($X \neq 0$) de M tel que : $\lambda{}^t\overline{X}X = {}^t\overline{X}(MX) = {}^t\overline{X}M^{-1}X = {}^t(\overline{M^{-1}X})X = {}^t(\frac{1}{\lambda}\overline{X})X = \frac{1}{\lambda}{}^t\overline{X}X$.

D'où $\lambda = \frac{1}{\lambda}$, i.e. $|\lambda| = 1$. \square

Corollaire 4 - *Si $\varphi \in \mathcal{SO}(E)$, alors 1 est valeur propre de φ .*

Si φ est une isométrie indirecte, alors -1 en est une valeur propre.

Preuve - Comme le déterminant d'une application linéaire est le produit de ses valeurs propres, on a :

Cas 1 : le polynôme caractéristique de φ admet trois racines réelles. Dans ce cas, elles sont toutes égales 1 ou alors 1 est racine simple et -1 racine double.

Cas 2 : le polynôme caractéristique de φ admet une seule racine réelle. Dans ce cas, les deux autres sont complexes et conjuguées, ainsi leur produit est positif car c'est leur module, qui est égal à 1. Donc la racine réelle ne peut être que 1. \square

Théorème 8 - L'application φ est élément de $\mathcal{SO}(E)$ si, et seulement si, il existe une base telle que sa matrice dans cette base est de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
 ($\theta \in \mathbb{R}$).

Preuve - Soit $\varphi \in \mathcal{SO}(E)$. On sait que $1 \in \text{Sp}\varphi$.

Si on note \mathcal{D} la droite vectorielle engendrée par x , on a $\varphi|_{\mathcal{D}} = \text{Id}_{\mathcal{D}}$. Donc \mathcal{D} est stable par φ . Soit \mathcal{P} le plan orthogonal à \mathcal{D} ; c'est un supplémentaire de \mathcal{D} .

On va maintenant montrer que \mathcal{P} est stable par φ , i.e. que $\varphi|_{\mathcal{P}} \in \mathcal{O}(\mathcal{P})$. Comme $\varphi(y) \in \mathcal{D}$, $\varphi(y) = y$, donc $(\varphi(x)|y) = 0$ pour tout y et $\varphi(x) \in \mathcal{P}$. Il existe donc une base orthonormée de \mathcal{P} dans laquelle la matrice M sera de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \# & \# \\ 0 & \# & \# \end{pmatrix},$$
 où $\#$ représente des coefficients à définir.

D'après la section précédente,
$$\begin{pmatrix} \# & \# \\ \# & \# \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
 ($\theta \in \mathbb{R}$).

Mais comme $\det M = 1$, on a enfin :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad \square$$

Remarque 7 - Si $\varphi \in \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$, alors il existe une base \mathcal{B} telle que sa matrice dans cette base est de la forme
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
 En effet, -1 est valeur propre (remarque (6.3)), et comme $\det\varphi = -1$ (remarque (3.14)), par un raisonnement analogue au précédent on obtient le résultat souhaité.

2.3.2 Endomorphismes et matrices symétriques

On considère E un espace vectoriel euclidien de dimension 3.

Définition 22 - Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$; on dira que φ est **symétrique** si, et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2, (\varphi(x)|y) = (x|\varphi(y))$.

Notation 3 - On notera $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E .

Proposition 9 - Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et soit M sa matrice dans une base orthonormée. Alors $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ si, et seulement si $M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

Preuve - Pour tous $x, y \in E$, $(\varphi(x)|y) = (x|\varphi(y))$
 $\iff \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t(MX)Y = {}^tXMY$
 $\iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX(M - {}^tM)Y = 0)$
 $\iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t(M - {}^tM)X = 0$
 $\iff M - {}^tM = 0 \iff M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}). \quad \square$

Définition 23 - Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on appellera **projecteur orthogonal sur F** le projecteur sur F parallèlement à F^\perp .

On note p_F le projecteur orthogonal sur F . On a alors :

$$p_F \circ p_F = p_F$$

$$\text{Im}(p_F) = F$$

$$\text{ker}(p_F) = F^\perp$$

$$\forall x \in E, p_F(x) \in F, x - p_F(x) \in F^\perp$$

Proposition 10 - Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur ($p \circ p = p$). Alors p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, p est symétrique.

Preuve - Soient p un projecteur orthogonal et $(x, y) \in E^2$. Alors : $(p(x)|y) = (p(x)|y - p(y)) + (p(x)|p(y)) = (p(x)|p(y))$ car $p(x) \in \text{Im} p$ et $y - p(y) \in \text{ker} p = (\text{Im} p)^\perp$. L'expression $(p(x)|p(y))$ est symétrique en x, y donc $(p(x)|y) = (x|p(y))$.

Réciproquement, soit p un projecteur symétrique de E . On a : $\forall (x, y) \in \text{ker} p \times \text{Im} p$, $(x|y) = (x|p(y)) = (p(x)|y) = 0$, donc p projecteur orthogonal. \square

Proposition 11 - Soit p un projecteur orthogonal de E . Alors il existe une base orthonormée de E telle que la matrice de p dans cette base soit $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($r = \text{rg} p = \text{tr} p$).

Preuve - Il existe une base orthonormée \mathcal{B}_1 de $\text{Im} p$ et une base orthonormée \mathcal{B}_2 de $\text{ker} p$. Puisque $\text{Im} p$ et $\text{ker} p$ sont supplémentaires orthogonaux dans E , $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base orthonormée de E qui convient. \square

Définition 24 - Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on appellera **symétrie orthogonale par rapport à F** l'endomorphisme s_F de E défini par $s_F = 2p_F - \text{Id}$, où p_F est le projecteur orthogonal sur F .

Proposition 12 - Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie ($s \circ s = e$). Alors s est une symétrie orthogonale si, et seulement si, s est symétrique.

Preuve - On note $p = \frac{1}{2}(e + s)$. Alors $\text{ker} p = \text{ker}(s + e)$ et $\text{Im} p = \text{ker}(s - e)$. On a : $(s \text{ symétrie orthogonale}) \Leftrightarrow (p \text{ projection orthogonale}) \Leftrightarrow (p \text{ symétrique}) \Leftrightarrow (s \text{ symétrique})$. \square

Proposition 13 - Soit s une symétrie orthogonale de E . Il existe une base orthonormée de E telle que la matrice de s dans cette base soit $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ ($p = \dim(\text{ker}(s - e))$, $q = \dim(\text{ker}(s + e))$).

Preuve - Immédiat d'après ce qui précède. \square

Définition 25 - On appellera **réflexion** de E toute symétrie orthogonale dont l'espace des points fixes est un hyperplan de E .

Proposition 14 - Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$. Alors les sous-espaces propres pour φ sont orthogonaux entre eux.

Preuve - Soient λ, μ dans $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(\varphi)$; $\lambda \neq \mu$, $x \in \ker(\varphi - \lambda)$, $y \in \ker(\varphi - \mu)$. Alors on a : $x \neq 0, y \neq 0, \varphi(x) = \lambda x, \varphi(y) = \mu y$. D'où $(\lambda x|y) = (\varphi(x)|y) = (x|\varphi(y)) = (x|\mu y)$. Donc $(\lambda - \mu)(x|y) = 0$ et finalement $(x|y) = 0$. \square

Proposition 15 - Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$. Pour tout sous-espace vectoriel F de E stable par φ , F^\perp est stable par φ .

Preuve - Soient F un sous-espace vectoriel de E stable par φ et $x \in F^\perp$. On a : $\forall y \in F, (\varphi(x)|y) = (x|\varphi(y)) = 0$, d'où $\varphi(x) \in F^\perp$. \square

Proposition 16 - Soit $\varphi \in \mathcal{O}(E)$ et \mathcal{B} une base orthonormée de E . Alors pour que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ soit diagonalisable, il faut et il suffit que φ soit une symétrie orthogonale.

Preuve - On suppose $\varphi \in \mathcal{O}(E)$ diagonalisable. Comme $\varphi \in \mathcal{O}(E)$, $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(\varphi) \subset \{-1; 1\}$. Par suite, il existe une base orthonormée de E telle que la matrice de φ dans cette base soit $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. D'où $\varphi^2 = e$, donc φ est une symétrie. Soient $x \in \ker(\varphi - e)$, $y \in \ker(\varphi + e)$; on a alors : $(x|y) = (\varphi(x)|\varphi(y)) = (x|-y) = -(x|y)$, donc $(x|y) = 0$. Donc φ est une symétrie orthogonale.

Réciproque : Evident par ce qui précède. \square

Définition 26 - Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On dit que φ est **autoadjoint** si, pour tous $x, y \in E$, on a $(\varphi(x)|y) = (x|\varphi(y))$.

Théorème 9 - Théorème spectral - Tout $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint.

Preuve - 1. On montre que toutes les valeurs propres sont réelles. Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E . Soit A la matrice de φ dans cette base.

Le polynôme caractéristique de A , χ_A est scindé sur $\mathbb{C}[X]$. Soit alors λ une valeur propre de A et x le vecteur propre associé. On a λ dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Si l'on note X la matrice de x dans la base \mathcal{B} : ${}^t(AX)\overline{X} = {}^tXA\overline{X}$ (*). Par ailleurs, $AX = \lambda X$, d'où $\overline{AX} = \overline{\lambda X}$.

On a $A = \overline{A}$ car $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; et alors

$$(*) \Leftrightarrow {}^t(\lambda X)\overline{X} = {}^tX\overline{\lambda X}$$

$$(*) \Leftrightarrow \lambda {}^tX\overline{X} = \overline{\lambda} {}^tX\overline{X}$$

Or $X \neq 0$. Donc $\lambda = \overline{\lambda}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. On montre qu'il existe une base de vecteurs propres de φ par récurrence sur n .

Si $n = 1$, c'est trivial.

On suppose le théorème vrai au rang $n - 1$. Soit λ une valeur propre de φ et x le vecteur propre associé. Soit H l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par x . On sait que $\dim H = n - 1$.

Soit $y \in H$. Alors $(\varphi(y)|x) = (y|\varphi(x)) = (y|\lambda x) = \lambda(x|y) = 0$ et alors $\varphi(y) \in H$. De plus, il est clair que $\varphi|_H$ est autoadjoint. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base (e_2, \dots, e_n) de H orthonormée formée de vecteurs propres de $\varphi|_H$. Par suite, (x, e_2, \dots, e_n) est une base de E formée de vecteurs propres de φ . \square

Corollaire 5 - Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E)$. Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle sa matrice M est diagonale. En équivalent matriciel, on a : $\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \exists (A, D) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) ; M = ADA^{-1}$, où $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices réelles diagonales de taille n .

2.3.3 Description géométrique des isométries de $\mathcal{O}(E)$

On considère E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, et \mathcal{B} une base orthonormée orientée de E . On va caractériser les isométries de $\mathcal{O}(E)$ par leurs invariants (ou points fixes) et anti-invariants (vecteurs transformés en leurs opposés). Pour cela, on va se servir de leur matrice dans la base \mathcal{B} , sous forme normale. On a vu plus haut que les éléments de $\mathcal{O}(E)$ ont des matrices associées dans la base \mathcal{B} pouvant être de deux formes normales :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Soit $x \in E$ de matrice dans la base \mathcal{B} le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Détermination des invariants et des anti-invariants des isométries de $\mathcal{SO}(E)$ (6.21) - On cherche les invariants, *i.e.* on résout l'équation $AX = X$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \cos\theta - x_3 \sin\theta \\ x_2 \sin\theta + x_3 \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(1) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } \theta \not\equiv 0[2\pi]; \text{ ou } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ si } \theta \equiv 0[2\pi].$$

On cherche les anti-invariants, *i.e.* on résout l'équation $AX = -X$ (2).

$$(2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \cos\theta - x_3 \sin\theta \\ x_2 \sin\theta + x_3 \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } \theta \not\equiv \pi[2\pi]; \text{ ou } X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ si } \theta \equiv \pi[2\pi].$$

Interprétation géométrique (6.22) - On va s'intéresser d'abord aux cas particuliers, puis au cas général. On note A_0 lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$ et A_π pour $\theta \equiv \pi[2\pi]$.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On reconnaît l'identité de E .

$$A_\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

D'après (6.21), les invariants sont les vecteurs de la droite vectorielle $\mathcal{D} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et les anti-invariants sont les vecteurs de $Vect \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Par la proposition (6.15), on en déduit que A_π est la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à la droite \mathcal{D} . On l'appellera *retournement de l'espace de droite* \mathcal{D} .

Pour le cas général, qu'on note A_θ , $\theta \not\equiv 0$ ou $\pi[2\pi]$ d'après (6.21), les invariants sont les vecteurs de la droite vectorielle $\mathcal{D} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mais on n'a pas d'anti-invariants. Considérons alors la restriction de l'isométrie étudiée au plan $P = Vect \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right)$. Cette restriction aura alors comme matrice dans la base \mathcal{B} la matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, ce qui, selon la section 5 est la matrice d'une rotation vectorielle d'angle θ . Pour résumer, l'isométrie induite dans P est une rotation vectorielle d'angle θ , les vecteurs de \mathcal{D} sont invariants. On peut donc, une fois l'orientation de E et de \mathcal{D} fixée, définir A_θ comme la matrice d'une *rotation vectorielle de l'espace d'angle θ et d'axe \mathcal{D}* .

Détermination des invariants et des anti-invariants des isométries de $\mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$ (6.23) - On cherche les invariants, *i.e.* on résout l'équation $BX = X$ (3).

$$(3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \cos \theta - x_3 \sin \theta \\ x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } \theta \not\equiv 0[2\pi]; \text{ ou } X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ si } \theta \equiv 0[2\pi].$$

On cherche les anti-invariants, *i.e.* on résout l'équation $BX = -X$ (4).

$$(4) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \cos \theta - x_3 \sin \theta \\ x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

$$(4) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } \theta \not\equiv \pi[2\pi]; \text{ ou } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ si } \theta \equiv \pi[2\pi].$$

Interprétation géométrique (6.24) - Comme précédemment, cas particuliers puis cas général. Et de même, on note B_0 pour $\theta \equiv 0[2\pi]$ et B_π pour $\theta \equiv \pi[2\pi]$.

$$B_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par une étude analogue à celle de A_π , on a : B_0 est la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel P engendré par les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. C'est donc une *réflexion vectorielle de l'espace, de plan P*.

$$B_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On reconnaît $-Id$. C'est la matrice d'une isométrie où seule l'origine est fixe et où tous les autres vecteurs sont anti-invariants. On remarque aussi que $B_\pi = A_\pi B_0$. Elle représente donc la *symétrie centrale*.

En ce qui concerne le cas général, qu'on note B_θ , $\theta \not\equiv 0$ ou $\pi[2\pi]$, d'après (6.23), c'est la matrice d'une transformation dont les anti-invariants appartiennent à une droite vectorielle et dont le seul invariant est l'origine. Comme $B_\theta = A_\theta B_0$, c'est la matrice d'une isométrie composée d'une rotation vectorielle d'angle θ et d'axe \mathcal{D} et d'une réflexion orthogonale par rapport au plan P . On l'appellera *antirotation vectorielle d'angle θ et d'axe \mathcal{D}* .

Remarques (6.25) - *i)* Il est clair que : $A_\theta = B_\theta B_0$, $B_\theta = A_\theta B_0$, $A_\pi = A_0 B_0$, $A_0 = B_0^2$. Tout élément de $\mathcal{O}(3)$ est le produit d'une matrice représentant une réflexion et d'une matrice représentant une rotation. Dans le cas des réflexions, on considère que la rotation est d'angle $0[2\pi]$.

ii) Une fois E orienté et d'origine fixée, on obtient l'axe d'une rotation par l'étude de ses invariants et l'angle par sa trace qui vaut $1 + 2 \cos \theta$. Pour une symétrie orthogonale s , on a la dimension du sous-espace par rapport auquel s'effectue la symétrie par le calcul de $\dim \mathcal{I}nv(s)$ ou par celui de $\dim \mathcal{O}pp(s)$.

Remarque (6.26) - Soit $\varphi \in \mathcal{O}(E)$. Alors on a :

- i)* φ est une rotation $\Leftrightarrow \text{tr}\varphi = 1 + 2 \cos \theta$
- ii)* φ est l'identité $\Leftrightarrow \text{tr}\varphi = 3$
- iii)* φ est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow \text{tr}\varphi = -1$
- iv)* φ est une antirotation $\Leftrightarrow \text{tr}\varphi = -1 + 2 \cos \theta$
- v)* φ est une symétrie centrale $\Leftrightarrow \text{tr}\varphi = -3$
- vi)* φ est une réflexion orthogonale $\Leftrightarrow \text{tr}\varphi = 1$

Remarque (6.27) - Comme les colonnes (ou les lignes) des matrices associées aux isométries forment une base orthonormale de E , on peut interpréter ces applications comme des déplacements et anti-déplacements dans l'espace ou comme des transformations de l'espace lui-même par changement de base (ou de repère).

Chapitre 3

Sous-groupes finis de $\mathcal{SO}(3)$ et groupes polyédraux



1. C'est un icosaèdre artisanal, fabriqué avec des jouets aimantés pour enfants.

3.1 Polyèdres réguliers : définitions et quelques propriétés générales

Définition 27 - Soient E et F deux espaces affines de directions respectives \vec{E} et \vec{F} (espaces vectoriels sur un même corps \mathbb{K}). Alors toute application $\varphi : E \rightarrow F$ telle qu'il existe une application \mathbb{K} -linéaire $\vec{\varphi}$ de \vec{E} dans \vec{F} : $\forall (M, N) \in E^2$; $\vec{\varphi}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)}$ est une **application affine** de E dans F .

Proposition 17 - Une application φ entre espaces affines E et F est affine si, et seulement si, elle conserve le rapport vectoriel (ou ce qui revient au même le rapport des mesures algébriques).

Preuve - La condition est nécessaire. On va montrer qu'elle est suffisante. Si l'application $\varphi : E \rightarrow F$ conserve les rapports vectoriels, elle conserve les milieux et possède de ce fait une application vectorielle additive $\vec{\varphi} : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$ telle que si $\vec{u} \in \vec{E}$, soit (M, N) un couple de points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ et on pose $\vec{\varphi}(\vec{u}) = \overrightarrow{M'N'}$ ($M' = \varphi(M), N' = \varphi(N)$) ; cette définition ne dépend pas du choix fait à l'endroit de M et N).

Si $(\lambda, \vec{v}) \in \mathbb{R} \times \vec{E}$ ($\vec{v} \neq 0$), et si A, B, C sont des points tels que $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\lambda \vec{v} = \overrightarrow{AB}$, la conservation du rapport vectoriel $\lambda = \overrightarrow{AB}/\overrightarrow{AC}$ fait qu'on a : $\lambda = \overrightarrow{A'B'}/\overrightarrow{A'C'}$. Cela signifie que $\lambda = \vec{\varphi}(\lambda \vec{v})/\vec{\varphi}(\vec{v})$, soit : $\vec{\varphi}(\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{\varphi}(\vec{v})$. Il suit que $\vec{\varphi}$ est linéaire et donc φ est affine. \square

Théorème 10 - Une application φ d'un espace affine E dans un autre espace affine F est affine si, et seulement si, elle "conserve le barycentre", i.e. si l'image par φ du barycentre de tout système de points pondérés est le barycentre de l'image de ces points par φ , affectés des mêmes coefficients. Par associativité du barycentre, il suffit que ce soit vrai pour les barycentres de couples de points.

Preuve - Si l'application φ conserve le barycentre, elle conserve les rapports : si $\lambda = \overrightarrow{AB}/\overrightarrow{AC}$, on a $\lambda \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 0$, ce qui est l'équation barycentrique caractérisant A comme barycentre de (C, λ) et $(B, -1)$ (on peut supposer $\lambda \neq 1$). Il suit que si $\varphi(A) = A', \varphi(B) = B'$ et $\varphi(C) = C'$, A' est le barycentre de (C', λ) et $(B', -1)$, et on a donc : $\lambda \overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'B'} = 0$, ou encore $\lambda = \overrightarrow{A'B'}/\overrightarrow{A'C'}$. L'application φ est donc affine d'après la proposition précédente. La réciproque est immédiate. \square

Théorème 11 - Pour un espace affine E toute isométrie est une application affine.

Preuve - Soit E un espace affine ; φ une isométrie quelconque de E fixée.

1. *Conservation de l'alignement* : On utilise le cas d'égalité dans l'inégalité du triangle. Les points $A, B, C \in E$ sont alignés si, et seulement si, $AB = AC + CB$ ou $AC = AB + BC$ ou $BC = BA + AC$. On note $A' = \varphi(A), B' = \varphi(B)$ et $C' = \varphi(C)$. On a alors, pour la première égalité : $A'B' = AB = AC + CB =$

$A'C' + C'B'$. Les autres cas se traitent de la même façon. Donc A, B, C alignés entraîne $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)$ alignés.

2. *Conservation du barycentre* : Soient A et B deux points de E , $\lambda \in \mathbb{R}$ et C le barycentre de $(A, \lambda), (B, 1 - \lambda)$. Alors on a $AC = (1 - \lambda)AB$.

- Si $\lambda \in [0; 1]$, $C \in [AB]$.
- Si $\lambda < 0$, $C \in]AB] \setminus [AB]$.
- Si $\lambda > 1$, $C \in [AB[\setminus [AB]$.

Donc C barycentre de A et B entraîne $\varphi(C)$ barycentre de $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$. \square

Lemme 7 - *Les isométries qui conservent le polyèdre P sont celles qui conservent l'ensemble des sommets et elles conservent son isobarycentre (ou centre de P).*

Preuve - Corollaire du théorème précédent. \square

Notation 4 - *Ces isométries forment le **groupe du polyèdre P** , noté G_P ou simplement G si aucune confusion n'est possible.*

Définition 28 - *Un polyèdre convexe P est **régulier** si, étant donné deux faces f et f' , deux arêtes a et a' de ces faces respectives, deux sommets s et s' de ces arêtes respectives, il existe une isométrie (forcément unique) transformant f en f' , a en a' et s en s' (i.e. $(f, a, s) \mapsto (f', a', s')$).*

Remarque 8 - *En termes de groupes, P est donc régulier si, et seulement si son groupe G_P opère transitivement sur les drapeaux (f, a, s) , où $s \in a \subset f$; il opère toujours fidèlement.*

Propriétés 1 1. *Un polyèdre régulier a toutes ses faces isométriques, ce sont toutes des polygones réguliers avec le même nombre de côtés, que l'on appelle l'**ordre d'une face** et que l'on note ν . En effet, si s et s' sont des sommets des arêtes respectives a et a' d'une même face f , il existe une isométrie transformant (f, a, s) en (f, a', s') et f est donc stable par ν rotations, où ν est son nombre de côtés.*

2. *De la définition, on déduit que, si s et s' sont deux sommets de P , il existe une isométrie $\varphi \in G_P$ telle que $\varphi(s) = s'$; par suite, chaque sommet d'un polyèdre régulier est l'extrémité d'un même nombre d'arêtes, qu'on appelle le **degré du sommet** et qu'on note δ ; ils sont équidistants du centre et par suite, cosphériques : un polyèdre régulier est inscriptible dans une sphère, sa sphère circonscrite.*

Théorème 12 - *Un polyèdre P dont les F faces ont ν côtés a un groupe d'isométrie G_P de cardinal $|G| \leq 2F\nu$, avec égalité si, et seulement si, il est régulier.*

Preuve - Soit P un polyèdre, F son nombre de faces et ν le nombre de côtés de chaque face. Soit φ une isométrie de P .

On fixe un drapeau $\tau = (f, a, s)$ et on cherche combien il y a de drapeaux τ' possibles tels que $\tau' = \varphi(\tau) = (f', a', s')$. Comme P a F faces, il y a au plus F choix possibles pour f' . Il y a ν arêtes par face donc ν choix pour a' . Et puisque chaque arête a deux extrémités, il y a donc au plus 2 choix pour s' . \square

3.2 Équation caractéristique et signature

3.2.1 Formule des classes et de Burnside

Théorème 13 - Formule des classes

Soit G un groupe fini et soit E un G -ensemble fini. On suppose que G opère à gauche sur E .

Soit $x \in E$. On note Ω_x son orbite et G_x son stabilisateur dans G .

On considère $\gamma : \begin{pmatrix} G \\ G_x \end{pmatrix} \longrightarrow \Omega_x$
 $g \longmapsto gx$.

Cette application est surjective par définition de l'orbite et deux éléments g et g' ont la même image si, et seulement si, $g^{-1}g' \in G_x$ et donc γ injective ; *i.e.* bijective. Dès lors, comme G est fini,

$$|\Omega_x| = [G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|} \quad (*).$$

Soit $\{x_i\}_{1 \leq i \leq k}$ une famille de représentants des G -orbites distinctes. Alors les Ω_{x_i} ($1 \leq i \leq k$) forment une partition de E et donc

$$|E| = \sum_{i=1}^k |\Omega_{x_i}|.$$

Grâce à (*), on déduit :

$$|E| = \sum_{i=1}^k \frac{|G|}{|G_{x_i}|}.$$

Cette égalité est l'équation aux classes.

Théorème 14 - Formule de Burnside - Soit G un groupe fini et soit E un G -ensemble fini. On suppose que G opère à gauche sur E par l'action γ notée :

$\gamma : G \times E \longrightarrow E$
 $(g, x) \longmapsto g.x$. On note $|E/G|$ le nombre des G -orbites de E et E^g l'ensemble des points fixes d'un élément g de G . Alors

$$|E/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |E^g|.$$

Preuve - On considère l'application

$$\delta : G \times E \longrightarrow \{0; 1\}$$

$$(g, x) \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } g.x = x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

D'où :

$$\sum_{x \in E} \sum_{g \in G} \delta(g, x) = \sum_{(g, x) \in G \times E} \delta(g, x) = \sum_{g \in G} \sum_{x \in E} \delta(g, x).$$

Et comme, d'une part :

$$\sum_{x \in E} \sum_{g \in G} \delta(g, x) = \sum_{x \in E} |G_x| = \sum_{x \in E} \frac{|G|}{|\Omega_x|} = \sum_{i=1}^{|E/G|} \sum_{x \in \Omega_i} \frac{|G|}{|\Omega_x|} = \sum_{i=1}^{|E/G|} |G| = |G| \cdot |E/G| \quad ;$$

d'autre part :

$$\sum_{g \in G} \sum_{x \in E} \delta(g, x) = \sum_{g \in G} |E^g| \quad ;$$

on obtient finalement

$$\sum_{g \in G} |E^g| = |G| \cdot |E/G|. \quad \square$$

3.2.2 Équation caractéristique, signature

On fixe G , sous-groupe fini de $\mathcal{SO}(3)$ non réduit à l'identité.

Définition 29 - On appelle **pôles** d'une rotation $g \in \mathcal{SO}(3)$ ($g \neq \text{Id}$) l'intersection de l'axe de la rotation g et de la sphère unité \mathcal{S} , de centre l'origine et de rayon 1.

Notation 5 - (i) On note \mathcal{P} l'ensemble des pôles des éléments de $G \setminus \{\text{Id}\}$.

(ii) On note $|G| = N$ et on considère l'action de G sur \mathcal{S} restreinte à \mathcal{P} .

(iii) On note $r = |\mathcal{P}/G|$; $\omega_1, \dots, \omega_r$ les orbites de G dans \mathcal{P} ; ν_1, \dots, ν_r les cardinaux des stabilisateurs de ces orbites ($\nu_i = |G_p|$ pour $p \in \omega_i$).

Remarque 9 - (i) L'ensemble \mathcal{P} est fini et stable par G .

(ii) Pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a $-p \in \mathcal{P}$. Les stabilisateurs de p et $-p$ coïncident. Par conséquent, si pour un pôle p , le cardinal de son stabilisateur est égal à un unique ν_i , p et $-p$ sont dans la même orbite.

(iii) Le stabilisateur d'un pôle est un sous-groupe qui stabilise le plan orthogonal à ce pôle, et qui est cyclique.

(iv) L'isobarycentre d'une orbite ω_i est fixe par G . Si \mathcal{P} contient deux pôles non opposés, cela entraîne que ce barycentre est l'origine.

Définition 30 - La **signature** d'un sous-groupe fini de $\mathcal{SO}(3)$ est la liste $(N; \nu_1, \dots, \nu_r)$.

Théorème 15 - On a :

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right);$$

c 'est l'équation caractéristique de G .

Preuve - On ne s'intéressera qu'aux orbites pour lesquelles G n'est pas réduit à l'identité.

On pose $\Gamma = \{(g, x) \in G \setminus \{\text{Id}\} \times \mathcal{P}; g(x) = x\}$. On va calculer $|\Gamma|$ de deux manières :

1. On considère l'application surjective δ du théorème précédent. Soit $g \in G \setminus \{Id\}$. On sait qu'on a deux pôles pour un tel g . D'où :

$$|\Gamma| = \sum_{g \in G \setminus \{Id\}} \sum_{x \in \mathcal{P}} \delta(g, x) = \sum_{g \in G \setminus \{Id\}} 2 = 2(N - 1).$$

2. Soit $x \in \mathcal{P}$, on note ω_x son orbite (dans \mathcal{P}/G); et soit ν_x le cardinal du stabilisateur G_x d'une telle orbite. Pour $y \in \omega_x$, on a : $G_y \setminus \{Id\} = \{g \in G; (g, y) \in \Gamma\}$ et $|G_y \setminus \{Id\}| = \nu_y - 1 = \nu_x - 1$. Donc le nombre de couples $(g, x) \in \Gamma$ pour chaque orbite ω_x est $|\omega_x|(\nu_x - 1)$. D'après la formule des classes, le nombre de ces couples est $(N/\nu_x)(\nu_x - 1)$. Au total, pour tous les x de \mathcal{P} , on a :

$$|\Gamma| = \sum_{\omega_x \in \mathcal{P}/G} \frac{N}{\nu_x} (\nu_x - 1).$$

3. Par 1. et 2., on a :

$$2(N - 1) = \sum_{\omega_x \in \mathcal{P}/G} \frac{N}{\nu_x} (\nu_x - 1),$$

soit, en divisant par N :

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_{\omega_x \in \mathcal{P}/G} \left(1 - \frac{1}{\nu_x}\right).$$

On note qu'il y a $r = |\mathcal{P}/G|$ termes dans cette somme. \square

3.2.3 Résolution de l'équation caractéristique

On cherche les familles $(N; r; \nu_1, \dots, \nu_r)$ d'entiers strictement positifs solutions de l'équation caractéristique $2 - \frac{2}{N} = \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right)$, avec $N \geq 2$, $\nu_i \geq 2$ si $1 < i \leq r$.

Proposition 18 - Dans l'équation caractéristique, r vaut 2 ou 3.

Preuve - (i) Si $r = 1$, le premier membre de la relation précédente est strictement inférieur à N , ce qui donne $2(N - 1) < N$; soit $N < 2$. Or c'est exclu.

(ii) Par ailleurs, chaque terme $1 - 1/\nu_i$ est supérieur ou égal à $1/2$, donc la relation précédente prouve que $2(N - 1) \geq rN/2$, d'où $(4 - r)N \geq 4$, et donc r ne peut être supérieur à 4. \square

Théorème 16 - L'équation caractéristique ne peut être vérifiée que pour les deux cas suivants :

1. Soit $r = 2$ et $\nu_1 = \nu_2 = N$.
2. Soit $r = 3$ et alors :
 - (i) 2, 2, $N/2$ et donc N est pair ;
 - (ii) 2, 3, 3 et $N = 12$;
 - (iii) 2, 3, 4 et $N = 24$;
 - (iv) 2, 3, 5 et $N = 60$.

Preuve - 1. Si $r = 2$, on a : $N(2 - 1/\nu_1 - 1/\nu_2) = 2N - 2$, ce qui s'écrit aussi : $2 = N/\nu_1 + N/\nu_2$. Mais ces deux rapports sont des entiers puisque ν_i divise N par le théorème de Lagrange. La seule solution est donc $2 = 1 + 1$ et $\nu_1 = \nu_2 = N$.

2. Pour $r = 3$, on a trois orbites et on peut supposer $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$.

La relation s'écrit : $1 < 1 + 2/N = 1/\nu_1 + 1/\nu_2 + 1/\nu_3$, ce qui empêche alors que tous les ν_i soient supérieurs ou égaux à 3. Nécessairement, $\nu_1 = 2$.

On a alors : $1/2 < 1/2 + 2/N = 1/\nu_2 + 1/\nu_3$, ce qui empêche ν_2 et ν_3 d'être tous les deux supérieurs ou égaux à 4. Il reste $\nu_2 = 2$, et alors N est pair et $\nu_3 = N/2$, ou bien $\nu_2 = 3$ et on a alors : $-2/N = 1/6 - 1/\nu_3$. Et comme $\nu_3 \geq 3$, cela laisse trois possibilités : $\nu_3 = 3$ et $N = 12$ ou $\nu_3 = 4$ et $N = 24$ ou enfin $\nu_3 = 5$ et $N = 60$. \square

3.3 Sous-groupes finis de $\mathcal{SO}(3)$

3.3.1 Séries infinies

Proposition 19 - Pour $r = 2$, $\nu_1 = \nu_2 = N$ dans l'équation caractéristique, le groupe G est formé de N rotations de même axe, et il est cyclique d'ordre N .

Preuve - Si $\nu_1 = \nu_2 = N$, chaque orbite a un seul élément, et son stabilisateur est le groupe tout entier. C'est donc qu'il y a deux pôles opposés, un seul axe pour les N rotations et le groupe est cyclique d'ordre N . \square

Un objet susceptible d'avoir ce groupe comme groupe de rotations sera par exemple une pyramide à base un polygone régulier à N côtés.

Proposition 20 - Pour $r = 3$, $\nu_1 = \nu_2 = 2$ et $\nu_3 = N/2$ dans l'équation caractéristique, le groupe G est soit le groupe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, soit le groupe diédral \mathcal{D}_N d'ordre N .

Preuve - On fixe m dans \mathbb{N}^* . On suppose qu'il y a trois orbites, avec $N = 2m$ pair, $\nu_1 = \nu_2 = 2$ et $\nu_3 = m$.

- Si $m = 2$, $|G| = 4$ et alors chaque orbite ω_i a pour cardinal $|\omega_i| = |G|/\nu_i = 4/2 = 2$. On en déduit que $\nu_i = \{\text{Id}, \rho_i\}$ où ρ_i est un demi-tour. Mais, si p est un pôle, pour que son orbite ne contienne que le pôle opposé $-p$, il faut que les axes des autres demi-tours soient dans le plan orthogonal. Les trois demi-tours ont donc des axes deux à deux perpendiculaires.

Or, pour i ($1 \leq i \leq 3$), on a évidemment $\rho_1\rho_2 = \rho_3$, $\rho_2\rho_3 = \rho_1$, $\rho_1\rho_3 = \rho_2$, et donc $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (groupe de Klein).

- Si $m > 2$, l'orbite de cardinal $N/m = 2$ contient deux pôles (forcément opposés) engendrant l'axe d'une rotation ρ d'ordre $m > 2$. L'orbite correspondante

définit alors un polygone régulier à m côtés. Les deux autres orbites ont des stabilisateurs d'ordre 2, donc correspondant à des demi-tours, d'axe orthogonal à celui de ρ , pour les mêmes raisons que le cas précédent. Comme leur cardinal est m , chaque orbite définit un polygone régulier à N côtés ; la figure dans le plan est donc celle de deux polygones réguliers imbriqués, et le groupe G est engendré par une rotation ρ et un des demi-tours θ . On vérifie que $\theta \circ \rho \circ \theta^{-1} = \rho^{-1}$ et l'on reconnaît le groupe diédral d'ordre $2m = N$. \square

La figure la plus simple dont c'est le groupe de rotations est un polygone plan à m côtés.

3.3.2 Groupes symétriques

Définition 31 - Pour tout entier $n \geq 1$, le **groupe symétrique** \mathfrak{S}_n est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, que l'on note \mathbb{N}_n .

Remarque 10 - Il est connu que le groupe \mathfrak{S}_n est fini d'ordre $n!$.

Définition 32 - Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le **support de** σ est l'ensemble : $\text{supp}(\sigma) = \{i \in \mathbb{N}_n; \sigma(i) \neq i\}$.

Définition 33 - Une permutation $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ est un **cycle de longueur r ou r -cycle** ($(1 \leq r \leq n)$ dans \mathbb{N}) s'il existe un ensemble ordonné de r entiers distincts dans \mathbb{N}_n : j_1, j_2, \dots, j_r , tels que : $\gamma(j_1) = j_2, \gamma(j_2) = j_3, \dots, \gamma(j_{r-1}) = j_r, \gamma(j_r) = j_1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_n \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$, $\gamma(k) = k$.

Notation 6 - On notera un tel cycle $\gamma = (j_1, j_2, \dots, j_r)$.

Définition 34 - Un cycle de longueur 2 dans \mathfrak{S}_n est appelé **transposition**.

Proposition 21 - Dans tout groupe \mathfrak{S}_n , un r -cycle est un élément d'ordre r .

Preuve - Soit $\gamma = (j_1, j_2, \dots, j_r)$ un r -cycle dans \mathfrak{S}_n .

(i) Si $r = 1$, alors $\gamma = e$, donc $o(\gamma) = 1$.

(ii) On suppose $1 < r \leq n$; pour tout k ($1 \leq k \leq r$), on a : $\gamma(j_k) = j_{k+1}$, $\gamma^2(j_k) = j_{k+2}$, ..., $\gamma^{r-k}(j_k) = j_r$, ..., $\gamma^r(j_k) = j_k$. D'autre part, si $r < n$ et $i \notin \text{supp}(\gamma)$, alors $\gamma(i) = i$. Les r éléments j_1, j_2, \dots, j_r étant distincts, r est le plus petit entier positif tel que $\gamma^r = e$, d'où $o(\gamma) = r$. \square

Théorème 17 - Soit γ et γ' deux cycles dans \mathfrak{S}_n . Pour qu'ils soient conjugués dans \mathfrak{S}_n , il suffit qu'ils aient même longueur.

Preuve - Triviale par le principe de conjugaison. \square

Définition 35 - Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Si t est le nombre des σ -orbites distinctes dans \mathbb{N}_n , on pose :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-t}.$$

On appellera $\varepsilon(\sigma)$ la **signature de la permutation** σ .

Par exemple, la signature d'une transposition est toujours -1 .

Lemme 8 - Si σ dans \mathfrak{S}_n a t orbites et, pour τ une transposition, $\sigma\tau$ a t' orbites, alors $t' \equiv t + 1[2]$.

Preuve - On note $\tau = (i, j)$.

1. On suppose que i et j sont dans la même orbite de σ . On pose $\sigma = (\underbrace{\dots}_{(1)}, i, \underbrace{\dots}_{(2)}, j, \underbrace{\dots}_{(3)})$.

Alors $\sigma\tau = (\underbrace{\dots}_{(1)}, i, \underbrace{\dots}_{(2)}, j, \underbrace{\dots}_{(3)})(i, j) = (\underbrace{\dots}_{(1)}, i, \underbrace{\dots}_{(3)})(\underbrace{\dots}_{(2)}, j)$ et donc $t' = t + 1$.

2. On suppose que i et j sont dans deux orbites différentes de σ . Si l'on note $\sigma = (\dots, i, \dots)(\dots, j, \dots)$, on remarque facilement, vu le calcul précédent, que $t' = t - 1$.

□

Proposition 22 - On considère, pour $n \geq 2$ dans \mathbb{N} , l'application $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1; 1\}$, $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$.

(i) Si $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ où les τ_i sont des transpositions, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$.

(ii) L'application ε est un épimorphisme de groupes.

Preuve - (i) Pour montrer l'assertion, il suffit de montrer que $\varepsilon(\sigma\tau) = -\varepsilon(\sigma)$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et τ une transposition (qui existe puisque $n \geq 2$). Or c'est évident d'après le lemme précédent, et comme $\varepsilon(\tau) = -1$.

(ii) La condition $n \geq 2$ implique la surjectivité de ε .

On sait que les transpositions engendrent \mathfrak{S}_n ; donc, pour σ et σ' dans \mathfrak{S}_n , on peut noter $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ et $\sigma' = \tau'_1 \dots \tau'_l$ où les τ_i ($1 \leq i \leq k$) et τ'_j ($1 \leq j \leq l$) sont des transpositions.

On a alors : $\sigma\sigma' = \tau_1 \dots \tau_k \tau'_1 \dots \tau'_l$; d'où $\varepsilon(\sigma\sigma') = (-1)^{k+l} = (-1)^k (-1)^l = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$. Et alors ε est un épimorphisme de groupes. □

Définition 36 - Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est dite **paire** si sa signature est 1, **impaire** si sa signature est -1 .

Remarque 11 - Etant donné un groupe symétrique \mathfrak{S}_n , on désigne par \mathfrak{A}_n l'ensemble des permutations paires de \mathfrak{S}_n , qui en est l'unique sous-groupe d'indice 2.

Pour $n = 1$, on a : $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{S}_1 = (e)$.

Pour $n \geq 2$, $\mathfrak{A}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n; \varepsilon(\sigma) = 1\}$ est le noyau de l'épimorphisme ε . \mathfrak{A}_n est donc un sous-groupe distingué de \mathfrak{S}_n et comme $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n \simeq \{-1; 1\}$, $[\mathfrak{S}_n : \mathfrak{A}_n] = 2$ et donc $|\mathfrak{A}_n| = n!/2$.

Définition 37 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appellera \mathfrak{A}_n le **groupe alterné de degré** n .

3.4 Groupes polyédraux : présentation par générateurs et relations

3.4.1 Préliminaires

Notation 7 - Soit X un ensemble non vide. On note X^{-1} un ensemble en bijection avec X , et disjoint de X . L'image de $x \in X$ par cette bijection est notée x^{-1} .

Définition 38 - On appelle **mot sur** $X \cup X^{-1}$ toute suite finie (ou liste) de n éléments de $X \cup X^{-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), plusieurs éléments de cette suite pouvant être égaux. On y ajoute la suite vide, notée e . On appelle n la **longueur du mot**.

On désignera par X^* l'ensemble des mots sur $X \cup X^{-1}$.

Définition 39 - On dit qu'un mot $u \in X^*$ est **réduit**, si $u = e$, ou si $u = a_1 a_2 \dots a_n$, avec $a_i \in X \cup X^{-1}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $a_{i+1} \neq a_i^{-1}$, quel que soit i ($1 \leq i \leq n-1$).

Définition 40 - On note F_X l'ensemble des mots réduits de X^* .

Soit alors l'opération $*$ définie par : $e * u = u * e = u$ pour $u \in F_X$, et si $u = a_1 a_2 \dots a_k$, $u' = b_1 b_2 \dots b_l$, alors $u * u' = a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_l$ lorsque $a_k b_1$ n'est pas de la forme xx^{-1} ou $x^{-1}x$. Sinon on applique l'opération à $a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ et $b_2 b_3 \dots b_l$.

On dit que F_X est le **groupe libre engendré par** X .

Remarque 12 - F_X est bien un groupe. En effet, en remarquant que $(x^{-1})^{-1} = x$, l'inverse de $w = a_1 a_2 \dots a_k$ est $a_k^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$ et il est bien réduit si w est réduit. L'élément neutre est le mot vide e . L'associativité est évidente.

Définition 41 - Si $G = F_X$ est un groupe libre et \mathcal{R} un ensemble de mots réduits, on note H le sous-groupe normal engendré par \mathcal{R} , et l'on note $\langle X | \mathcal{R} \rangle$ le groupe quotient G/H .

On dit que $\langle X | \mathcal{R} \rangle$ est une **présentation** de ce groupe quotient.

Propriétés 2 - Pour tout groupe G et toute application $f : X \rightarrow G$ telle que "les images des éléments de X dans G satisfont les relations \mathcal{R} ", il existe un unique morphisme de groupes $\varphi : \langle X | \mathcal{R} \rangle \rightarrow G$ tel que $f = \varphi \circ \iota$, où $\iota : X \rightarrow F_X / \langle \mathcal{R} \rangle$ est l'application naturelle.

Remarque 13 - On en déduit que tout groupe engendré par X est un quotient de F_X .

3.4.2 Groupes diédraux finis

Théorème 18 - Pour tout $n \geq 2$ dans \mathbb{R} , le groupe diédral \mathcal{D}_n est isomorphe à

$$G_n = \langle (a, b) | a^2 = b^2 = (ab)^n = e \rangle.$$

Preuve - On peut faire la preuve pour les générateurs et relations

$$G_n = \langle (a, b) | a^n = b^2 = (ab)^2 = e \rangle,$$

ce qui revient au même et qui est plus commode. Par hypothèse, $G_n = \langle a, b \rangle$; par suite, tout élément de G_n est un produit de puissances entières (positives, négatives ou nulles), de a et de b . Le groupe G peut donc être considéré comme engendré par $\langle a \rangle \cup \langle b \rangle$.

Par hypothèse aussi, $\langle a \rangle = \{a^0 = e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ et $\langle b \rangle = \{b^0 = e, b\}$. De ce fait, on remarque facilement que :

- pour $0 \leq k \leq n-1$, les éléments $a^k b$ sont deux à deux distincts et $b \notin \langle a \rangle$ implique qu'aucun d'eux n'appartient à $\langle a \rangle$;
- de plus $o(ab) = 2$ et $o(b) = 2$ implique, quel que soit k ($0 \leq k \leq n-1$), $o(a^k b) = 2$ d'où $ba^k = a^{n-k}b$.

On en déduit que $\langle a \rangle \langle b \rangle = \langle b \rangle \langle a \rangle$ est un sous-groupe de G_n et c'est alors le sous-groupe engendré par $\langle a \rangle \cup \langle b \rangle$; par suite : $G_n = \langle a \rangle \langle b \rangle$, d'où $G_n = \{e, a, \dots, a^{n-1}, b, ab, \dots, a^{n-1}b\}$.

Le groupe G_n est donc d'ordre $2n$ et est parfaitement déterminé par la donnée de ses deux générateurs a et b satisfaisant aux relations données. Par ailleurs, on sait que les générateurs du groupe diédral \mathcal{D}_n satisfont aux mêmes relations. Donc, si on les note ϱ (d'ordre n) et σ (d'ordre 2), tout morphisme $\varphi \in \text{Hom}(\mathcal{D}_n, G_n)$ tel que $\varphi(\varrho) = a$ et $\varphi(\sigma) = b$ est nécessairement un isomorphisme de \mathcal{D}_n sur G_n . \square

3.4.3 Groupes polyédraux

Théorème 19 - Le groupe tétraédral \mathfrak{A}_4 est isomorphe à

$$G_T = \langle a, b | a^3 = b^3 = (ab)^2 = e \rangle.$$

Preuve - Les 3-cycles $s = (2, 3, 1)$ et $t = (3, 4, 2)$ de \mathfrak{A}_4 vérifient $(st)^2 = e = s^3 = t^3$; il y a donc un seul morphisme φ de $\text{Hom}G_T, \mathfrak{A}_4$ tel que $\varphi(a) = s$ et $\varphi(b) = t$, et φ est surjectif car s et t engendrent \mathfrak{A}_4 . Il suffit de montrer que $|G_T| \leq 12$. On remarque pour cela qu'à partir de $(ab)^2 = e$, on obtient, en tenant compte de $a^{-1} = a^2$ et $b^{-1} = b^2$: $aba = b^2$, $(ba)^2 = e$, $bab = a^2$, $ab = b^2a^2$, $ba = a^2b^2$, $ba^2b = b^2ab^2$, $ab^2a^2 = a^2b$, $ab^2a = a^2ba^2$, $a^2ba = ab^2$, $aba^2 = b^2a$, $b^2ab = ba^2$, $bab^2 = a^2b$, $a^2b^2a = ba^2$, $ba^2b = ab^2a$ (*). Soit G la partie de G_T telle que $G = \{e, a, a^2, b, b^2, ab, ab^2, a^2b, a^2b^2, ab^2, b^2a, ab^2a\}$. Comme $e \in G$ et que d'après (*), $Ga \subseteq G$ et $Gb \subseteq G$, $G = G_T$ d'où $|G_T| = |G| \leq 12$. \square

Théorème 20 - *Existence du groupe tétraédral.*

On se place dans un espace euclidien E . Soit \mathcal{B} une base de E dans laquelle la matrice de s est $\sigma = \tau \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tau^{-1}$, avec $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et celle de t est $\rho = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il suffit, pour prouver l'assertion, de trouver l'angle de rotation de la matrice τ . En effet, on aura trouvé deux matrices engendrant un groupe tétraédral. Grâce à la résolution des équations données par les relations entre générateurs, on trouve $\Sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ vérifiant $= \Sigma^3 = \rho^3 = (\rho\Sigma)^2 = \text{Id}$. \square

Théorème 21 - *Le groupe octaédral \mathfrak{S}_4 est isomorphe à*

$$G_O = \langle a, b | a^3 = b^4 = (ab)^2 = e \rangle.$$

Preuve - Les éléments $s = (2, 3, 4)$ et $t = (1, 4, 3, 2)$ engendrent \mathfrak{S}_4 , et vérifient $s^3 = t^4 = (st)^2 = e$. Donc il suffit de montrer que $|G_O| \leq 24$. De : $a^3 = b^4 = (ab)^2 = e$, on déduit : $aba = b^3$, $bab = a^2$, $ab = b^3a^2$, $ba = a^2b^3$, $ab^3a = a^2ba^2$ (*).

Soit L_1 le sous-groupe de G_O engendré par b . On définit : $L_2 = L_1a$, $L_3 = L_1a^2$, $L_4 = L_1a^2b$, $L_5 = L_1a^2b^2$, $L_6 = L_1a^2ba^2$, $L = \cup_{i=1}^6 L_i$. On a : $|L_i| = |L_1| \leq 4$ pour tout i , donc $|L| \leq 24$. Puisque $e \in L_1$, si on prouve que $LG_O \subset L$, on en déduira $G_O \subset L$, d'où $|G_O| \leq 24$. Pour cela, il suffit de montrer que $La \subset L$ et $Lb \subset L$.

On remarque, d'après (*) et le fait que $L_1b = b$, que : $L_1ab = L_1b^3a^2 = L_1a^2 = L_3$, et $L_1a^2b^2 = L_1b^3a^2b^2 = L_1ab^3 = L_1a^2ba = L_4a$. On a donc : $L_1a = L_2$, $L_2a = L_3$, $L_3a = L_1$, $L_4a = L_5$, $L_5a = L_1a^2ba^2 = L_6$, $L_6a = L_4$, $L_1b = L_1$, $L_2b = L_3$, $L_3b = L_4$, $L_4b = L_5$, $L_5b = L_1ba = L_1a = L_2$, $L_6b = L_1(aba)ba^2 = L_1ab^2a^2b = L_1ab^2(bab)b = L_1(ab^3a)b^2 = L_1a^2ba^2b^2 = L_6b^2$, d'où $L_6b = L_6$. Ce qui prouve $LG_O \subset L$. \square

Théorème 22 - *Existence du groupe octaédral.*

On se place dans un espace euclidien E . Soit \mathcal{B} une base de E dans laquelle la matrice de t est $\sigma = \tau \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tau^{-1}$, avec $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et celle de s est $\rho = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il suffit, pour prouver l'assertion, de trouver l'angle de rotation de la matrice τ . En effet, ces deux matrices auront alors engendré un groupe octaédral. Grâce à la résolution des équations données par les relations entre générateurs, on trouve $\theta = \pi/4$. \square

Théorème 23 - *Le groupe icosaédral \mathfrak{A}_5 est isomorphe à*

$$G_I = \langle a, b \mid a^3 = b^5 = (ab)^2 = e \rangle.$$

Preuve - (i) Soient dans \mathfrak{A}_5 les éléments α, β, γ définis par : $\gamma = \alpha\beta$, $\alpha = (1, 4, 2)$, $\beta = (1, 2, 3, 4, 5)$, $\gamma = (2, 3)(4, 5)$. On a : $\alpha^3 = \beta^5 = \gamma^2 = e$, et $\{\alpha, \beta\}$ engendre \mathfrak{A}_5 . En effet, le sous-groupe H engendré par α et β est de cardinal divisible par 2, 3 et 5, donc par 30. Mais \mathfrak{A}_5 étant simple, il n'a pas de sous-groupe d'indice 2, donc $\mathfrak{A}_5 = H$.

(ii) Pour établir le théorème, il suffit maintenant de montrer que $|G_I| \leq 60$. Soit C le sous-groupe de G_I engendré par b . Il est cyclique de cardinal 5, et on a $Cb^k = C$ pour tout k de \mathbb{Z} .

De $(ab)^2 = e$, on déduit $bab = a^2$, $ab = b^4a^2$, $ba = a^2b^4$, $aba = b^4$, $a^2ba^2 = ab^4a$.

On pose : $C_1 = C$, $C_2 = Ca$, $C_3 = Cab$, $C_4 = Cab^2$, $C_5 = Cab^3$, $C_6 = Cab^4$, $C_7 = Cab^4a$, $C_8 = Cab^4ab$, $C_9 = Cab^4ab^2$, $C_{10} = Cab^4ab^3$, $C_{11} = Cab^4ab^4$, $C_{12} = Cab^4ab^3a$, $L = \cup_{i=1}^{12} C_i$.

Puisque $|C_i| = 5$, on a : $|L| \leq 60$. On va prouver que $LG_I \subset L$, ce qui entraînera $G_I \subset L$, donc $|G_I| \leq 60$. Pour cela, il suffit de voir que $La \subset L$ et $Lb \subset L$, ou, ce qui revient au même : pour tout i ($1 \leq i \leq 12$), $C_i a \subset L$ et $C_i b \subset L$.

Or, d'une part :

$$C_1 b = C_1,$$

$$C_2 b = C_3,$$

$$C_3 b = C_4,$$

$$C_4 b = C_5,$$

$$C_5 b = C_6,$$

$$C_6 b = Ca = C_2,$$

$$C_7 b = C_8,$$

$$C_8 b = C_9,$$

$$C_9 b = C_{10},$$

$$C_{10} b = C_{11},$$

$$C_{11} b = C_7,$$

$$\begin{aligned} C_{12} b &= Cab^4ab^3(ab) = Cab^4ab^3(b^4a^2) = Cab^4(ab^2)a^2 = Cab^4(ab)ba^2 = Cab^4(b^4a^2)ba^2 = \\ &= Cab^3(a^2ba^2) = Cab^3ab^4a = (Cb)ab.b(bab)b^3a = C(bab)b(bab)b^3a = C(a^2ba^2)b^3a = \\ &= C(ab^4a)b^3a = C_{12}; \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$C_1 a = C_2,$$

$$C_2 a = (Cb)ab = Cab = C_3,$$

$$C_3 a = Caba = Cb^4 = C_1,$$

$$C_4 a = Cab^2a = Cab(ba) = Caba^2b^4 = C(aba)ab^4 = (Cb^4)ab^4 = Cab^4 = C_6,$$

$$\begin{aligned} C_5 a &= Cab^3a = C(ab)b^2a = Cb^4a^2b^2a = Ca^2b^2a = Ca^2b(ba) = C(a^2ba^2)b^4 = \\ &= Cab^4ab^4 = C_{11}, \end{aligned}$$

$$C_6 a = Cab^4a = C_7,$$

$$C_7 a = Cab^4a^2 = Ca(ab) = Ca^2b = C(bab)b = Cab^2 = C_4,$$

$$C_8 a = Cab^4(aba) = Cab^4b^4 = Cab^3 = C_5,$$

$$\begin{aligned} C_9 a &= Cab^4ab^2a = Cab^3(bab)(ba) = Cab^3a^2(a^2b^4) = Cab^3ab^4 = Cab^3(ab)b^3 = \\ &= Cab^3b^4a^2b^3 = Cab^2a^2b^3 = C(ab)ba^2b^3 = (Cb^4)a^2ba^2b^3 = C(a^2ba^2)b^3 = Cab^4ab^3 = \end{aligned}$$

$$C_{10},$$

$$C_{10} a = C_{12},$$

$$\begin{aligned}
C_{11}a &= Cab^4(ab^4a) = Ca(b^4a^2)ba^2 = Ca(ab)ba^2 = Ca^2b^2a^2 = C(bab)b^2(bab) = \\
&= (Cb)ab^4ab = Cab^4ab = C_8, \\
C_{12}a &= Cab^4ab^3a^2 = Cab^4ab^3(bab) = Cab^4ab^4ab = (C_{11}a)b = C_8b = C_9.
\end{aligned}$$

On a bien $LG_I \subset L$, d'où le théorème. \square

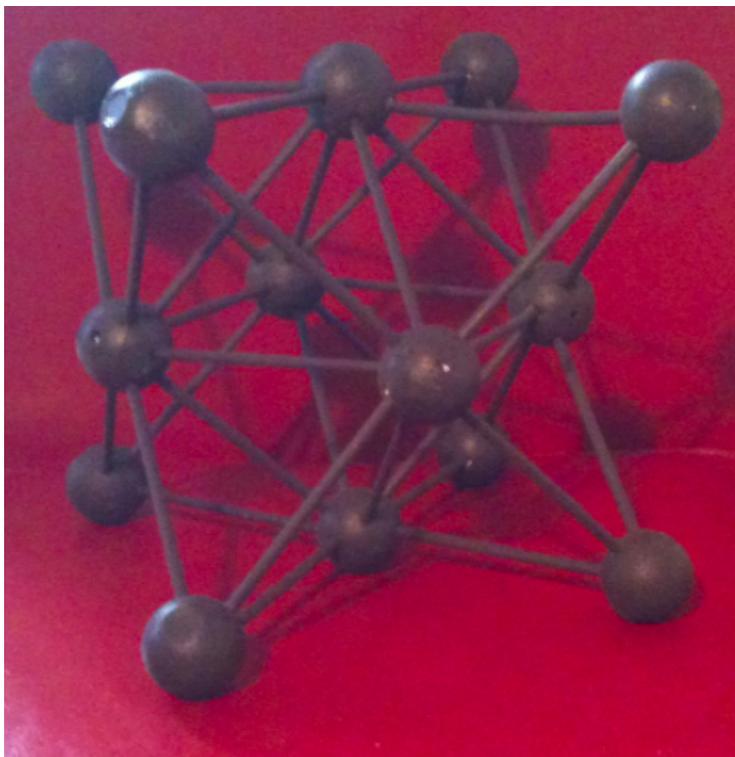
Théorème 24 - *Existence du groupe icosaédral.*

On se place dans un espace euclidien E . Soit \mathcal{B} une base de E dans laquelle la matrice de β est $\sigma = \tau \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tau^{-1}$, avec $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et celle de α est $\rho = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il suffit, pour prouver l'assertion, de trouver l'angle de rotation de la matrice τ . En effet, on aura trouvé deux matrices engendrant un groupe icosaédral. Grâce à la résolution des équations données par les relations entre générateurs, on trouve $\Sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$ vérifiant $= \Sigma^5 = \rho^3 = (\rho\Sigma)^2 = \text{Id}$. \square

Remarque 14 - *On retrouve comme ordres des générateurs les nombres qui sont à la fois les symboles de Schläfli des polyèdres, mais aussi les signatures des sous-groupes finis de $\mathcal{SO}(3)$ que sont leurs groupes de rotations respectifs.*

Chapitre 4

Annexes



1

1. C'est un réseau hexagonal compact artisanal. On voit bien la forme cubique que prend le réseau lorsqu'il est tronqué.

4.1 Projections stéréographiques d'un icosaèdre

4.1.1 Introduction

Soit \mathbb{S}_n l'ensemble des $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ ("sphère de dimension n "). Soit $a = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}_n$. On note E l'ensemble des $(x_1, \dots, x_n, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On va définir un homéomorphisme de $\mathbb{S}_n \setminus \{a\}$ sur E .

Soit $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}_n \setminus \{a\}$. La droite D joignant a à x dans \mathbb{R}^{n+1} est l'ensemble des points de la forme $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, 1 + \lambda(x_{n+1} - 1))$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Ce point est dans E pour $1 + \lambda(x_{n+1} - 1) = -1$, i.e. pour $\lambda = 2(1 - x_{n+1})^{-1}$ (on a $x_{n+1} \neq 1$ car $x \neq a$). Donc $D \cap E$ se réduit au point $f(x)$ de coordonnées :

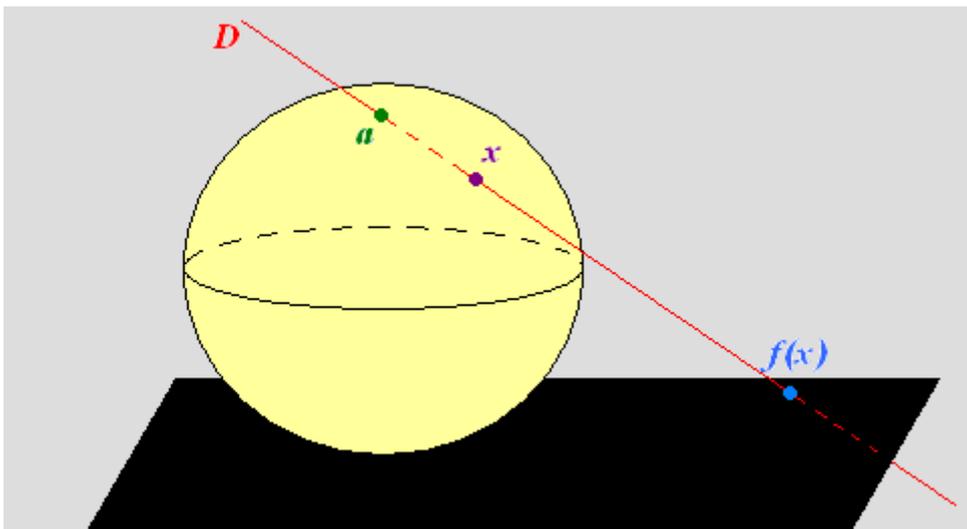
$$x'_1 = \frac{2x_1}{1 - x_{n+1}}, \quad x'_2 = \frac{2x_2}{1 - x_{n+1}}, \quad \dots, \quad x'_n = \frac{2x_n}{1 - x_{n+1}}, \quad x'_{n+1} = -1 \quad (*).$$

On a ainsi défini une application f de $\mathbb{S}_n \setminus \{a\}$ dans E . Si $x' = (x'_1, \dots, x'_n, -1)$ est donné dans E , il existe un point $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}_n \setminus \{a\}$ et un seul tel que $f(x) = x'$. En effet, en résolvant (*), on a les conditions : $x_i = x'_i(1 - x_{n+1})/2$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\sum_{i=1}^n x_i'^2(1 - x_{n+1})^2/4 + x_{n+1}^2 = 1$; d'où, en divisant par $1 - x_{n+1}$ qui est non nul : $(x_1'^2 + \dots + x_n'^2)(1 - x_{n+1})/4 - 1 - x_{n+1} = 0$; soit :

$$x_{n+1} = \frac{x_1'^2 + \dots + x_n'^2 - 4}{x_1'^2 + \dots + x_n'^2 + 4} \quad \text{et} \quad x_i = \frac{4x'_i}{x_1'^2 + \dots + x_n'^2 + 4}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (**).$$

Ainsi, f est une bijection de $\mathbb{S}_n \setminus \{a\}$ sur E . Les formules (*) et (**) prouvent que f et f^{-1} sont continues.

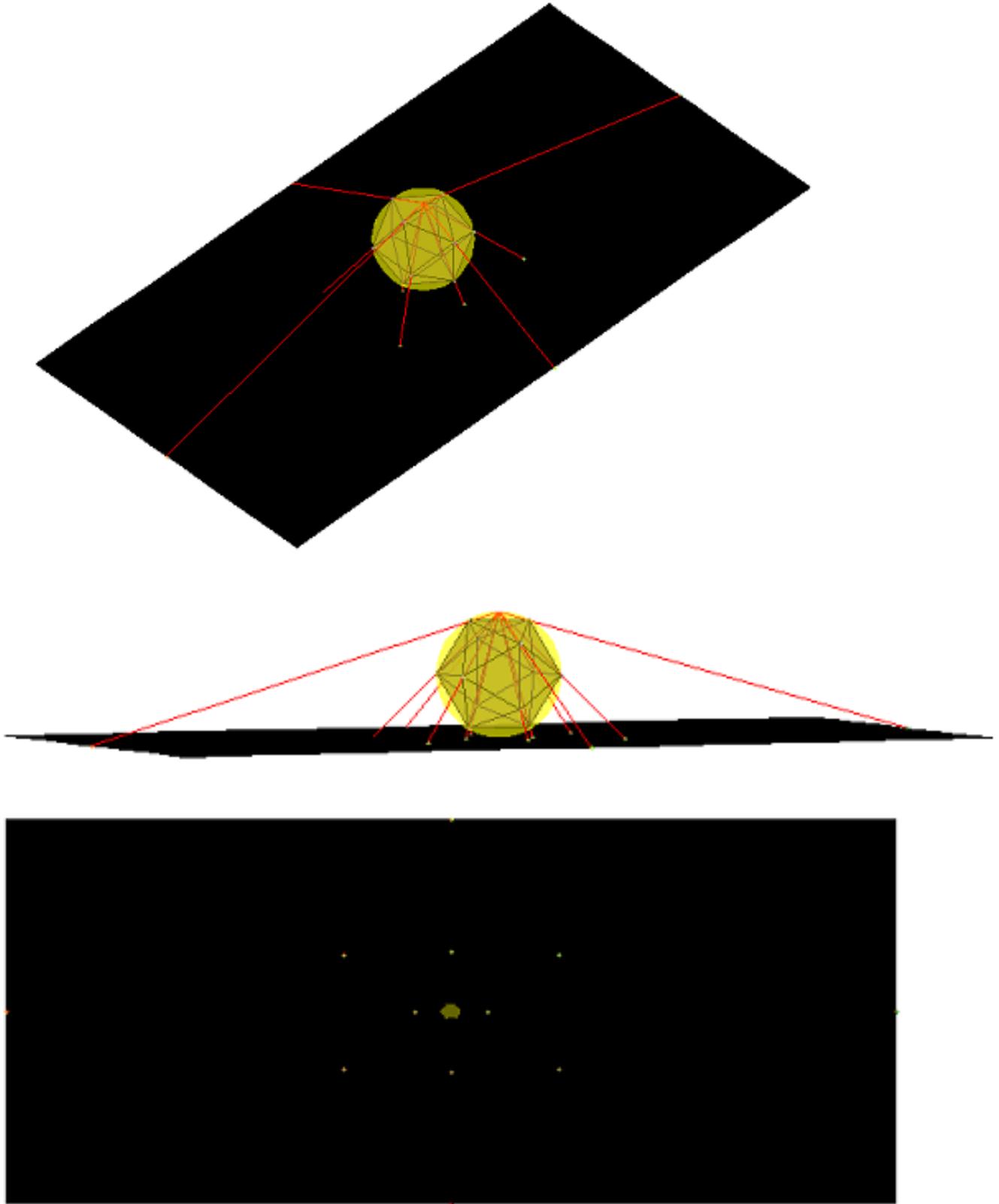
L'homéomorphisme f s'appelle la *projection stéréographique* de $\mathbb{S}_n \setminus \{a\}$ sur E , a est le *pôle* de la projection ; ce que l'on peut représenter comme suit :



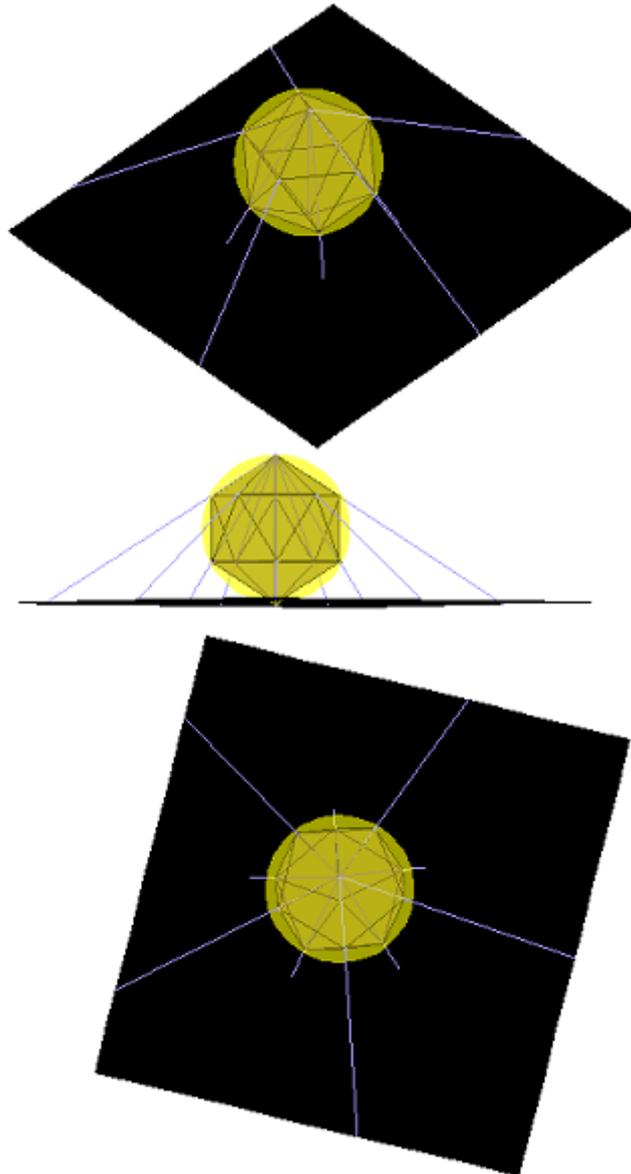
C'est ce que l'on va faire en prenant comme points à projeter les sommets d'un icosaèdre régulier inscrit dans une sphère dont un des points est le pôle de projection.

4.1.2 *Projections de l'icosaèdre (dessins)*

Si le pôle de projection est un point quelconque (*i.e.* qu'il n'est pas un sommet de l'icosaèdre), on obtient :



Si le pôle de projection est un sommet de l'icosaèdre, on obtient (sans la projection du sommet à l'infini) :



4.1.3 *Lignes de code : logiciel Maple*

Lorsque le pôle est un sommet de l'icosaèdre

```
> restart:
```

```
> with(geom3d):  
  with(LinearAlgebra):
```

```

with(Student[LinearAlgebra]):

# On définit les "objets" de base :
sphere(s,[point(o,0,0,0),1]):
point(P, 0,0,1):
icosahedron(i, point(o,0,0,0), 1):
V:=vertices(i):

# On convertit les points V[k] en vecteurs :
for k from 1 to 12
do v[k]:=convert(V[k],Vector)
od:

# On définit l'angle T de rotation de l'icosaèdre :
T:=simplify(VectorAngle(v[1],Vector[column](< 0,0,1 >))):

# et celui-ci :
line(l, [t, 0, 0], t):
rotation(j, i, evalf(T), 1):

# On définit la matrice de rotation et on calcule les coordonnées
des transformés des sommets de l'icosaèdre original :
R:=RotationMatrix(T, <1,0,0>):
for k from 1 to 12
do Vj[k]:=R.v[k]
od:

# Ceci est le plan p de la projection :
point(A, 0,0,-1):
point(B, 1,0,-1):
point(C, 0,1,-1):
plane(p, [A,B,C]):

# On détermine les images des sommets de l'icosaèdre qui
formeront les sommets du
nouvel icosaèdre à projeter sur le plan p :
LP:=[P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7,P8,P9,P10,P11,P12]:
for k from 1 to 12
do point((LP[k],Vj[k][1],Vj[k][2],Vj[k][3]))
od:

# On définit l'application "projection stéréographique" :
LQ:=[Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7,Q8,Q9,Q10,Q11,Q12]:
for k from 2 to 12
do StereographicProjection((LQ[k],LP[k],s))
od:

```

```

# On définit les segments joignant les points et leurs projetés :
LL:=[L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8,L9,L10,L11,L12]:
for k from 2 to 12
do segment(LL[k], [P,LQ[k]])
od:

# Et enfin le dessin :
draw([p(color=black), s(color=yellow, transparency=0.6), op(LP),
op(LQ[2..12]), op(LL[2..12]), j(color=violet, style=patch,
transparency=0.4)], style=patchnogrid);

```

Lorsque le pôle est un point quelconque de la sphère

```

> restart:

> with(geom3d):

# On définit les "objets" sur lesquels on travaille :
sphere(s, [point(o,0,0,0),1]):
icosahedron(i, point(o,0,0,0), 1):
V:=vertices(i):
point(P, 0,0,1):

# Voici le plan p de projection :
point(A, 0,0,-1):
point(B, 1,0,-1):
point(C, 0,1,-1):
plane(p, [A,B,C]):

# On transforme les sommets de l'icosaèdre en points à projeter :
LP:=[P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7,P8,P9,P10,P11,P12]:
for k from 1 to 12
do point((LP[k],V[k]))
od:

# On définit l'application "projection stéréographique" :
LQ:=[Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7,Q8,Q9,Q10,Q11,Q12]:
for k from 1 to 12
do StereographicProjection((LQ[k],LP[k],s))
od:

# On relie les points et leurs projetés par des segments :
LL:=[L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8,L9,L10,L11,L12]:
for k from 1 to 12
do segment(LL[k], [P,LQ[k]])
od:

```

```
# Enfin, ceci pour le dessin :
draw([p(color=black), s(color=yellow, transparency=0.6),
op(LP), opLQ, i(color=violet, style=patch, transparency=0.4),
(op(LL))(color=red)],
style=patchnogrid);
```

4.2 Angles invariants dans un polyèdre

Pour faire un peu mumuse avec Maple et les polyèdres...

```
> restart:

> Angles := proc(p,q)
description "Calcule l'angle recherché par le symbole de Schläfli
d'un polyèdre régulier":
local r, t, s, A, eqns:
uses LinearAlgebra:
r:=Matrix(<< cos(2*Pi/p) | -sin(2*Pi/p) | 0 >,
< sin(2*Pi/p) | cos(2*Pi/p) | 0 >,
< 0 | 0 | 1 >>):
t:=Matrix(<< 1 | 0 | 0 >,
< 0 | cos(theta) | -sin(theta) >,
< 0 | sin(theta) | cos(theta) >>):
s:=t.Matrix(<< -1 | 0 | 0 >,
< 0 | -1 | 0 >,
< 0 | 0 | 1 >>).MatrixInverse(t):
A:=(r.s)^q:
eqns:={A[1,1]=1, A[2,2]=1, A[3,3]=1, A[1,2]=0, A[1,3]=0,
A[2,1]=0, A[2,3]=0, A[3,1]=0, A[3,2]=0}:
evalf(solve(eqns,theta));
end proc:

> # L'icosaèdre :
Angles(3,5);

theta = 0.3648638282, theta = -0.3648638282

> # Le dodécaèdre :
Angles(5,3);

theta = 0.5535743592}$

> # Le tétraèdre :
```

```
Angles(3,3);

theta = 0.9553166180

> # L'octaèdre :
Angles(3,4);

theta = -1.570796327, theta = 1.570796327,
theta = 0.6154797085, theta = 0.6154797085

> # Le cube :
Angles(4,3);

theta = 0.7853981634
```

4.3 Bibliographie

- [ARN] ARNAUDIES et BERTIN, *Groupes, algèbres et géométrie*, Paris, Ellipses, 1993, tome 1.
- [AUD] AUDIN Michèle, *Géométrie*, 1998.
- [CAV] BARBIN et CAVEING (éd.), *Les philosophes et les mathématiques*, Paris, Ellipses, 1998, coll. « Irem ».
- [BER] BERGER Marcel, *Géométrie*, Paris, Cedic, 1997.
- [CAI] CAIROLI R., *Algèbre linéaire*, PPUR, 1991.
- [CAL] CALAIS Josette, *Éléments de théorie des groupes*, Paris, PUF, 1998, coll. « Mathématiques ».
- [COX] COXETER H.S.M, *Regular Polytopes*, New York, Dover Publications Inc., 1973.
- [DIX1] DIXMIER Jacques, *Cours de mathématiques du premier cycle*, Paris, Dunod, 1997, coll. « Sciences Sup ».
- [DIX2] DIXMIER Jacques, *Topologie générale*, Paris, PUF, 1981, coll. « Mathématiques ».
- [EUC] EUCLIDE, *Les Éléments*, Paris, PUF, 2001, coll. « Bibliothèque d'histoire des sciences ».
- [GAB] GABRIEL Pierre, *Matrices, géométrie, algèbre linéaire*, Paris, Cassini, 2001.
- [GRI] GRIFONE Joseph, *Algèbre linéaire*, Paris, Cepadues-Editions, 2002.
- [HAD] HADAMARD Jacques, *Leçons de géométrie*, Paris, Gabay, 1988, Vol.2, « Géométrie dans l'espace ».
- [LAD] LADEGAILLERIE Yves, *Géométrie affine, projective, euclidienne et analogmatique*, Paris, Ellipses, 2003.
- [LAK] LAKATOS Imre, *Proof and Refutations*, Cambridge University Press, 1976.
- [LAN1] LANG Serge, *Algebra*, Addison-Wesley, 1965, coll. « Addison-Wesley series in mathematics ».
- [LAN2] LANG Serge, *Linear Algebra*, Addison-Wesley, 1966, coll. « Addison-Wesley series in mathematics ».
- [PAR] PERRIN Daniel, *Cours d'algèbre*, Paris, École Normale Supérieure de jeunes filles, 1981.
- [PLA1] PLATON, *Timée*, trad. Brisson, Paris, Flammarion, 1993, coll. « Garnier Flammarion / Philosophie ».
- [PLA2] PLATON, *Epinomis*, Paris, Les Belles Lettres, 1976, coll. « Cuf Grecque ».