Transformation Groups, Vol. 7, No. 3, 2002, pp. 231–245

TORSEURS SUR LA DROITE AFFINE

P. GILLE

Département de Mathématiques,
UMR 8628 du C.N.R.S.,
Université Paris-Sud
F-91405 Orsay Cedex, France

gille@math.u-psud.fr

Abstract. The aim of the paper is to give another proof of a result of Raghunathan and Ramanathan on torsors on the affine line.

Introduction

Soient k un corps, k_s une clôture séparable de k et $\mathcal{G}$ le groupe de Galois de k_s sur k. Soit G/k un groupe algébrique réductif connexe. Si S/k est un schéma, on rappelle qu'un S-torseur sous G (ou un S-espace principal homogène sous $G_S = G \times_k S$) est un schéma E/S fidèlement plat et localement de type fini, muni d'une action à droite $E \times_S G_S \to E$ tel que le morphisme $E \times_S G_S \to E \times_S E$ défini par $(e,g) \to (e, e.g)$ soit un isomorphisme. Si le groupe G/k est lisse, l'ensemble de cohomologie étale $H^1_{\text{ét}}(S,G)$ classifie les S-torseurs sous G. Les torseurs sur la droite projective $\mathbb{P}^1_k$ et sur la droite affine $\mathbb{A}^1_k$ sont les sujets que l'on revisite dans cet article.

Si le corps k est algébriquement clos et de caractéristique nulle, la classification des torseurs sur la droite projective est due à Grothendieck [Gr]. Sur un corps k quelconque les torseurs sur la droite projective ont été classifiés par Harder [H2] et nous donnons une description précise de cette classification. L'étude des torseurs sur la droite affine est plus délicate et a été faite par Raghunathan et Ramanathan en utilisant la théorie de Bruhat–Tits.

Théorème [RR](1983) *L'application naturelle $H^1(k,G) \to H^1_{\text{ét}}(\mathbb{A}^1_k, G)$ induit une bijection*

$$H^1(k,G) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}\big(H^1_{\text{ét}}(\mathbb{A}^1_k, G) \to H^1_{\text{ét}}(\mathbb{A}^1_{k_s}, G)\big).$$

Ce théorème intervient dans l'étude des torseurs rationnellement triviaux dont on rappelle la définition [CTO, R]. Si S/k est un schéma connexe, on dit qu'un S-torseur E/S sous un groupe G/k est rationnellement trivial s'il existe un ouvert de Zariski $U \subset S$ tel que le U-torseur $E \times_S U$ est isomorphe au torseur trivial $G \times_k U$. En particulier, Raghunathan a déterminé avec ce théorème les $\mathbb{P}^1$-torseurs rationnellement triviaux sous un groupe réductif G/k. Bien que reprenant des éléments de [R], nous procédons en sens inverse en établissant suivant Harder la classification des torseurs rationnellement triviaux sur $\mathbb{P}^1_k$ pour ensuite démontrer le théorème principal avec la théorie de Bruhat–Tits (§4).

Received April 2, 2001. Accepted November 16, 2001.

Ce travail est essentiellement issu d'une thèse de doctorat réalisée sous la direction de Jean–Louis Colliot–Thélène [Gi]. Je le remercie vivement. Enfin, j'ai plaisir à remercier M. S. Raghunathan et Sacha Merkurjev pour leur intérêt porté à ce travail.

1. Notations et rappels

1.1. Droites affine et projective

On note $\mathbb{A}^1_k$ (resp. $\mathbb{P}^1_k$) la droite affine (resp. projective) et $k(t)$ le corps des fonctions de la droite projective et $\eta : \mathrm{Spec}(k(t)) \to \mathbb{P}^1_k$ le point générique. On note ∞ le point fermé à l'infini de $\mathbb{P}^1_k$. Si M est un point fermé de $\mathbb{P}^1_k$, on note O_M l'anneau local en M, $\widehat{O}_M$ son complété, $\widehat{k}_M$ le corps des fractions de $\widehat{O}_M$ et $k(M)$ le corps résiduel de O_M.

Si X/k est une variété algébrique intègre définie sur k et L/k une extension de corps, on note $X(k)$ l'ensemble de ses k-points rationnels, $X_L = X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(L)$ l'extension des scalaires de X à L.

1.2. Cohomologie

Soit X un schéma quasi-compact. On considère sur X les sites X_{Zar}, $X_{\mathrm{\acute{e}t}}$ et X_{fppf} [M]. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de groupes abéliens sur X sur un site $\mathcal{S}$, on notera $H^i_{\mathcal{S}}(X, \mathcal{F})$ le i-ième groupe de cohomologie de $\mathcal{F}$. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$, on notera parfois $H^i_{\mathcal{S}}(A, \mathcal{F})$ au lieu de $H^i_{\mathcal{S}}(X, \mathcal{F})$. Enfin, la cohomologie étale étant la plus utilisée, on notera $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i_{\mathrm{\acute{e}t}}(X, \mathcal{F})$. Soit H un X-schéma en groupes, plat de type fini. Suivant la définition de Demazure [SGA3], on dira que H est un X-schéma en groupes semi-simple (resp. réductif) s'il est lisse et affine sur X et si ses fibres géométriques sont des groupes algébriques semi-simples (resp. réductifs) connexes. On appelle X-torseur sous H (ou espace principal homogène) un X-schéma E fidèlement plat et localement de type fini sur X, muni d'une action de groupe $E \times_X H \to E$ telle que l'application $(e, h) \to (e, e{\cdot}h) : E \times_X H \to E \times_X E$ soit un isomorphisme de X-schémas compatible avec l'action de H. On prend les mêmes notations pour la cohomologie non abélienne que pour la cohomologie abélienne (définie par le procédé de Čech). Rappelons que si H/X est lisse, l'application naturelle $H^1(X, H) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(X, H)$ est bijective (cf. [SGA3], Exp. XXIV). Si l'on note $\mathrm{Tors}(X, H)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de X-torseurs sous H, on a une application naturelle $\mathrm{Tors}(X, H) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(X, H)$.

Soit V/X un schéma affine et localement de type fini sur X. Soit $f : H \to \mathrm{Aut}_X(V)$ un morphisme de faisceaux de groupes pour la topologie fppf où $\mathrm{Aut}_X(V)$ désigne le faisceau associé au préfaisceau $U \to \mathrm{Aut}_U(V \times_X U)$. Si E est un X-torseur sous H, le théorème de descente fidèlement plate assure l'existence du schéma quotient $E(V) = \frac{E \times_X V}{(e\cdot h, h^{-1}\cdot v)}$ qui est appelé le schéma tordu de V par le torseur E. Dans le cas où $X = \mathrm{Spec}(k)$, on peut remplacer l'hypothèse V affine par l'hypothèse plus faible V/k quasi-projectif (i.e., sous-schéma d'un espace projectif $\mathbb{P}^n_k$) [S1]. En particulier, le groupe H agit sur lui-même par automorphismes intérieurs et on a un morphisme de faisceaux $\mathrm{Int} : H \to \mathrm{Aut}_X(H)$. On obtient ainsi un schéma en groupes $E(H)$ qui est le tordu de H par le torseur E. Soit E' un X-torseur sous H. Comme H agit sur E', on peut tordre E' par E et obtenir le X-schéma $E(E')$ dont il est aisé de voir qu'il est muni d'une structure naturelle de X-torseur sous $E(H)$. Passant aux classes de torseurs, on obtient une bijection

$$E(\,\cdot\,) : H^1_{\mathrm{fppf}}(X, E(H)) \longrightarrow H^1_{\mathrm{fppf}}(X, H), \qquad [E(E')] \mapsto [E'].$$

Il existe un unique X-torseur sous $E(H)$ noté E^{opp} tel que $E^{\mathrm{opp}}(E(H))=E$ où $E(H)$ est vu comme le X-torseur trivial sous $E(H)$. Le torseur E^{opp} est le torseur opposé de E.

Soit $X \to Y$ un morphisme fini et plat. On note $R_{X/Y}H$ la restriction de H à Y (cf. [BLR], p. 191) et le morphisme $H \to R_{X/Y}H$ induit la bijection $H^1_{\mathrm{fppf}}(Y, R_{X/Y}H) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{fppf}}(X, H)$ ([SGA3], XXIV, 8.5).

1.3. Cohomologie galoisienne

On sait que la cohomologie galoisienne s'identifie à la cohomologie étale de $\mathrm{Spec}(k)$. On prendra parfois la notation de cohomologie des groupes $H^1(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ pour un faisceau galoisien $\mathcal{F}$. On note $Z^1(k,G)$ l'ensemble des 1-cocycles de $\mathcal{G}$ à valeurs dans $G(k_s)$ et l'action de $\mathcal{G}$ sur $G(k_s)$ est notée $\sigma(g) = {}^\sigma g$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}$. Soit $z \in Z^1(k,G)$. On note alors ${}_zG$ le groupe tordu de G par automorphismes intérieurs par le cocycle z. L'opération de torsion sera notée $z(\,\cdot\,) : H^1(k, {}_zG) \to H^1(k,G)$, [S1].

2. Théorie de Bruhat–Tits et entiers de torsion

Dans cette section (et uniquement là), on suppose que G/k est semi-simple simplement connexe déployé et presque simple; on sait que G/k provient par extension d'un schéma de Chevalley $G_{/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$ associé à un diagramme de Dynkin irréductible Δ. On note $G_{\mathrm{ad}}/\mathbb{Z}$ le groupe adjoint de G. Serre a associé à Δ un ensemble $S(\Delta)$ de nombres premiers de "torsion" [S2], §2.2. Ici, on associe à Δ deux entiers $d_1(\Delta)$, $d_2(\Delta)$ qui apparaissent dans la théorie de Bruhat–Tits et dont les diviseurs premiers sont des éléments de $S(\Delta)$.

2.1. Entiers de torsion des groupes de Chevalley

Soient T un $\mathbb{Z}$-tore maximal déployé de G. On note $\widehat{T} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}-\mathrm{gr}}(T, \mathbb{G}_m)$ (resp. $\widehat{T}^0 = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}-\mathrm{gr}}(T, \mathbb{G}_m)$) le groupe des caractères (resp. des cocaractères) de T. On considère le système de racines $\Phi = \Phi(T,G)$ $(\subset \widehat{T})$ associé à la représentation adjointe de G et Δ une base de Φ. Notons $(\ ,\ ) : \widehat{T}^0 \times \widehat{T} \to \mathbb{Z}$ la forme bilinéaire canonique. L'ensemble Δ détermine un système de racines positives $\Phi^+ \subset \Phi$ et un sous-groupe de Borel $B/\mathbb{Z}$ de $G/\mathbb{Z}$ de radical unipotent U. On ordonne arbitrairement l'ensemble $\Phi^+ = (\alpha_i)_{i=1,\dots,q}$. On a une famille $(u_\alpha : \mathbb{G}_a \to G)_{\alpha\in\Phi}$ de morphismes de groupes définis sur $\mathbb{Z}$ telle que l'on ait un isomorphisme $\prod_{i=1,\dots,q} u_{\alpha_i} : \prod_{i=1,\dots,q} \mathbb{G}_a \to U$. Notons α_0 l'opposé de la racine maximale. Alors

$$\alpha_0 + \textstyle\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \alpha = 0,$$

où c_α est un entier positif. Pour toute racine α de Φ, on note $T_\alpha = \mathrm{Ker}(\alpha)^0$, $Z_\alpha = Z_G(T_\alpha)$. Le groupe dérivé $[Z_\alpha, Z_\alpha]$ est de rang 1 et il existe un unique sous-groupe à un paramètre $\alpha^\vee : \mathbb{G}_m \to T \cap [Z_\alpha, Z_\alpha]$ tel que $T = \mathrm{Im}(\alpha^\vee).T_\alpha$ et $(\alpha^\vee, \alpha) = 2$. L'élément $\alpha^\vee$ est la coracine associée à α. Les $(\alpha^\vee)_{\alpha\in\Phi}$ forment un système de racines noté $\Phi^\vee$. Posons $E = \widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $E' = \widehat{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Notons $(\alpha^*)_{\alpha\in\Delta}$ la base duale de $(\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ (i.e., $(\alpha^*, \beta) = \delta_{\alpha,\beta}$). Notons Q (resp. $Q^\vee$) le réseau des racines de Φ (resp. $\Phi^\vee$), i.e., le sous-groupe de $\widehat{T}$ (resp. $\widehat{T}^0$) engendré par Φ (resp. $\Phi^\vee$). Notons

$$P = \left\{ x \in E' = \widehat{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid (\alpha^\vee, x) \in \mathbb{Z} \quad \forall\ \alpha^\vee \in \Phi^\vee \right\}$$

le réseau des poids et

$$P^\vee = \left\{ x \in E = \widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid (x, \alpha) \in \mathbb{Z} \quad \forall\ \alpha \in \Phi \right\} = \oplus_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z}\alpha^*.$$

On a $Q^\vee \subset \widehat{T}^0 \subset P^\vee$. Soit $\mu/_{\mathbb{Z}}$ le centre de G. On sait que l'on a un isomorphisme de groupes $\mu(-1) \xrightarrow{\sim} P^\vee/Q^\vee$ ([T1], p. 36).

Définition 2.1. On définit les entiers $d_1(\Delta)$ et $d_2(\Delta)$ par

$$d_1(\Delta) = \text{ exposant de } P^\vee/Q^\vee, \quad d_2(\Delta) = \mathrm{ppcm}_{\alpha\in\Delta}(c_\alpha).$$

Donnons les valeurs de ces entiers (cf. [Bou], tables) pour les différents types, où D_{2n+1} $(n \geq 2)$ et D_{2n} $(n \geq 2)$.

$\Delta =$	A_n	B_n	C_n	D_{2n+1}	D_{2n}	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$d_1 =$	$n+1$	2	2	4	2	3	2	1	1	1
$d_2 =$	1	2	2	2	2	$2\cdot 3$	$4\cdot 3$	$2\cdot 3\cdot 5$	$4\cdot 3$	$2\cdot 3$

On voit donc que les facteurs premiers de $d_1(\Delta)$ et de $d_2(\Delta)$ appartiennent à l'ensemble des entiers de torsion $S(\Delta)$.

2.2. Immeubles de Bruhat–Tits

Soit K un corps complet pour une valuation discrète non triviale v, d'anneau de valuation O et de corps résiduel k. Soit π une uniformisante de K. On note k_s une clôture séparable de k, $\mathcal{G}$ le groupe de Galois de k_s/k et $\widetilde{K}$ une extension séparable non ramifiée maximale de K. La valuation v se prolonge de façon unique à $\widetilde{K}$ dont on note $\widetilde{O}$ l'anneau de valuation. Le groupe de Galois de $\widetilde{K}/K$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{G}$.

On note $\mathcal{I} = \mathcal{I}(K, G)$ l'immeuble de Bruhat–Tits du groupe G_K [BrT1, BrT2]; chaque facette de $\mathcal{I}$ a un type qui est un sous-graphe du diagramme de Dynkin complété $\widetilde{\Delta} = \Delta \cup \{\alpha_0\}$. On dit qu'un point x de $\mathcal{I}$ est un sommet de type 0 si la facette F_x est de type $\{\alpha_0\}$ (et alors $F_x = \{x\}$). L'immeuble $\mathcal{I}$ est muni d'une action du groupe $G(K)$ qui préserve le type, et d'une action de $G_{\mathrm{ad}}(K)$. Le tore T_K définit un appartement $\mathcal{A}$ de $\mathcal{I}$ canoniquement isomorphe à $\widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et on dispose de la chambre standard $C \subset \widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ définie par

$$C = \{x \in \widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \;\mid\; (x, \alpha) > 0 \;\; \forall \alpha \in \Delta, \;\; (x, \alpha_0) < 1\},$$

dont l'adhérence $\overline{C}$ est domaine fondamental pour l'action de $G(K)$ sur $\mathcal{I}$. Le centre $c_{\mathcal{I}}$ de $\mathcal{I}$ est le point 0 de C. Les autre sommets de C sont les $\frac{\alpha^*}{c_\alpha} \in \widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ $(\alpha \in \Delta)$ et la translation par α^* dans $\mathcal{A}$ n'est pas autre chose que la restriction de l'action de $\frac{1}{c_\alpha}\alpha^*(\frac{1}{\pi}) \in T_{\mathrm{ad}}(K) \subset G_{\mathrm{ad}}(K)$ sur $\mathcal{I}$, où T_{ad} désigne l'image de T dans G_{ad}/K.

Soit K'/K une extension finie de corps valués d'indice de ramification e. On dispose alors suivant [Ro], II.4 d'une application de restriction

$$\rho_K^{K'} : \mathcal{I}(K, G) \to \mathcal{I}(K', G),$$

qui est $G(K)$-équivariante. Cette application envoie l'appartement $\mathcal{A}$ sur l'appartement $\mathcal{A}' \approx T^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ de $\mathcal{I}(K', G)$ défini par le tore $T \times_K K'$ selon le diagramme suivant

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r] & \mathcal{A}' \\ \widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\times e"] & \widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \arrow[u, "\wr"] \end{tikzcd}.$$

Le lemme 2.2 est une version précise de la phrase suivante:

Deux sommets de $\mathcal{I}$ deviennent conjugués après une ramification convenable du corps valué.

Soit d un entier positif et π_d une racine d-ième primitive de π. On note $O_d = O[\pi_d]$ (resp. $\widetilde{O}_d = \widetilde{O}[\pi_d]$), K_d (resp. $\widetilde{K}_d$) le corps de fractions de O_d (resp. $\widetilde{O}_d$) et

$$\rho_d : \mathcal{I} \to \mathcal{I}_d = I(K_d, G)$$

la restriction.

Lemme 2.2. *On suppose que $d_1(\Delta)\cdot d_2(\Delta)$ divise d.*

(a) *Soit F une facette de $\mathcal{I}$. Alors il existe un sommet y de $\mathcal{I}_d$ de type 0 tel que $y \in \rho_d(F)$.*

(b) *Soit $P \subset G(K)$ un sous-groupe borné. Alors il existe $g \in G(K_d)$ tel que $gPg^{-1} \subset G(O_d)$.*

Cet énoncé figure également dans [L] et peut avoir d'autres applications en théorie des groupes, par exemple [S3].

Démonstration. (a) Quitte à faire agir $G(K)$, on peut supposer que F est une facette de la chambre standard C. On peut supposer de plus que la facette F est réduite à un sommet de C, distinct de 0, i.e., $F = \{\frac{\alpha^*}{c_\alpha}\}$ avec $\alpha \in \Delta$. Suivant le diagramme ci-dessus, il faut voir que $d\frac{\alpha^*}{c_\alpha} \in \widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est un sommet de type 0 de l'appartement $\mathcal{A}_d$ de $\mathcal{I}_d$. Tout d'abord, d_2 divise c_α et on a donc $d_2\cdot\frac{\alpha^*}{c_\alpha} = \frac{d_2}{c_\alpha}\cdot\alpha^* \in P^\vee$. Mais $d_1\cdot P^\vee \subset Q^\vee = \widehat{T}^0$, on a $(d_1\cdot d_2)\cdot\frac{\alpha^*}{c_\alpha} \in \widehat{T}^0$. L'élément $\rho_d(\frac{\alpha^*}{c_\alpha})$ est donc un sommet de $\mathcal{I}_d$ de type 0.

(b) On peut supposer que P est un sous-groupe borné maximal de $G(K)$. Alors il existe un sommet x de $\mathcal{I}$ tel que $P = \mathrm{Stab}_{G(K)}(x)$. On pose $y = \rho_d(x) \in \mathcal{I}_d$. D'après le a, le point y est un sommet de type 0, donc il existe $g \in G(K_d)$ tel que $g\cdot y = c_{\mathcal{I}_d}$. On a $P \subset \mathrm{Stab}_{G(K_d)}(y) = g^{-1}\mathrm{Stab}_{G(K_d)}(c_{\mathcal{I}_d})g = g^{-1}G(O_d)g$. □

2.3. Lien avec la cohomologie galoisienne

Le lemme précédent a une conséquence importante pour les applications à la cohomologie galoisienne de la théorie de Bruhat–Tits : c'est la proposition suivante qui est le point crucial de la démonstration du théorème principal donnée au §4.

Proposition 2.3. *Soit $\mathfrak{G}/O$ un schéma en groupes semi-simples, simplement connexe, tel que $\mathfrak{G}_K$ soit un groupe absolument presque K-simple de type Δ. Notons $\rho_d : H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{G}(\widetilde{K})) \longrightarrow H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{G}(\widetilde{K}_d))$ la restriction induite par l'extension K_d/K. Si $d_1(\Delta)\cdot d_2(\Delta)$ divise d, alors $\rho_d\big(H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{G}(\widetilde{K}))\big) \subset \mathrm{Im}\big(H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{G}(\widetilde{O}_d)) \longrightarrow H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{G}(\widetilde{K}_d))\big)$.*

Démonstration. Rappelons tout d'abord que le schéma en groupes $\mathfrak{G}\times_O\widetilde{O}$ est déployé, et ainsi le groupe $\mathfrak{G}_{\widetilde{K}}$ est déployé. Soit $\gamma = [z] \in H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{G}(\widetilde{K}))$. On considère l'immeuble de Bruhat–Tits $\widetilde{\mathcal{I}}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{I}}_d$) du groupe $\mathfrak{G}_{\widetilde{K}}$ (resp. $\mathfrak{G}_{\widetilde{K}_d}$) et la restriction naturelle $\rho_d : \widetilde{\mathcal{I}} \to \widetilde{\mathcal{I}}_d$. Ces deux immeubles sont munis de l'action de $\mathcal{G}$, notée $x \mapsto {}^s x$ $(s \in \mathcal{G})$. Le cocycle z induit sur $\widetilde{\mathcal{I}}$ et $\widetilde{\mathcal{I}}_d$ une action tordue définie par $x \to z_s.{}^s x$ $(s \in \mathcal{G})$, compatible au morphisme ρ_d. D'après le théorème de point fixe de Bruhat–Tits ([BrT1], §3.2), il existe un point x de $\mathcal{I}$ fixe par $\mathcal{G}$ pour l'action tordue. Le groupe $\mathcal{G}$ stabilise la facette F_x de $\widetilde{\mathcal{I}}$. On note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les sommets de F_x, ils sont permutés par $\mathcal{G}$

(pour l'action tordue) et appartiennent à un même appartement de $\widetilde{I}$. Le lemme 2.2 montre que les sommets $y_i = \rho_d(x_i)$ sont des sommets de type 0 de $\widetilde{\mathcal{I}}_d$ appartenant à un même appartement de $\widetilde{I}_d$. On peut former la somme $x' = \sum_{i=1,\dots,n} x_i$ et le point $y' := \rho_d(x') = \sum_{i=1,\dots,n} \rho_d(x_i) \in \widetilde{\mathcal{I}}_d$ est un sommet de type 0 stable par $\mathcal{G}$. Il existe $g \in G(K_d)$ tel que $y' = g.c_{\widetilde{\mathcal{I}}_d}$. On a $z_s.{}^s y = y$ pour tout $s \in \mathcal{G}$, donc si $z'_s = g^{-1} z_s {}^s g$, vu que ${}^s c_{\widetilde{\mathcal{I}}_d} = c_{\widetilde{\mathcal{I}}_d}$, on obtient $z'_s.c_{\widetilde{\mathcal{I}}_d} = c_{\widetilde{\mathcal{I}}_d}$ $(s \in \mathcal{G})$. Par suite $z'_s \in \mathrm{Stab}_{\mathfrak{G}(\widetilde{K}_d)}(c_{\widetilde{\mathcal{I}}_d}) = G(\widetilde{O}_d)$ pour tout $s \in \mathcal{G}$. Il résulte que $\rho_d([z]) = [z'] \in \mathrm{Im}\big(H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{G}(\widetilde{O}_d)) \to H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{G}(\widetilde{K}_d))\big)$. □

3. Torseurs sur la droite projective

3.1. Le cas des tores

Soit M un k-tore. Si $\lambda \in \widehat{M}^0(k) = \mathrm{Hom}_{k-gr}(\mathbb{G}_m, M)$, on définit M_λ comme le push-out par $-\lambda$ du fibré de Hopf $\mathcal{O}(-1) = \mathbb{A}^2_k \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1$, ce qui s'écrit

$$M_\lambda = (-\lambda)_*(\mathcal{O}(-1)).$$

Lemme 3.1. (cf. [CTS], p. 408, §2) (a) *On a une suite exacte naturelle*

$$0 \longrightarrow H^1(k, M) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, M) \longrightarrow \widehat{M}^0(k) \longrightarrow 0.$$

(b) *L'application* $\widehat{M}^0(k) \to H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^1, M)$, $\lambda \mapsto [M_\lambda]$ *est un isomorphisme de groupes, qui est un scindage de la suite exacte du* (a).

On identifie dans la suite les groupes $\widehat{M}^0(k)$ et $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^1, M)$. En particulier pour le tore $\mathbb{G}_m$, on a un isomorphisme $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{G}_m)$.

3.2. Le théorème de Grothendieck–Harder

Soit $i : S/k \hookrightarrow G/k$ un k-tore déployé maximal de G, et ${}_kW = N_G(S)/Z_G(S)$ le groupe de Weyl relatif. On fait l'abus de notation $\widehat{S}^0 = \widehat{S}^0(k) = \mathbb{Z}^r$ où r est le rang relatif de G.

Théorème 3.2. (Grothendieck–Harder, [H2], Satz 3.1 et 3.4) *On suppose G/k quasi-déployé. Alors le morphisme* $i_* : H^1(\mathbb{P}^1_k, S) \to H^1(\mathbb{P}^1_k, G)$ *induit une bijection*

$$\widehat{S}^0(k)/{}_kW \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\big(H^1(\mathbb{P}^1_k, G) \xrightarrow{\eta_*} H^1(k(t), G)\big).$$

Remarque 3.3. Le théorème est dû à Grothendieck si k est algébriquement clos de caractéristique nulle et à Harder pour tout groupe réductif quasi-déployé G défini sur un corps quelquonque k; la Satz 3.1 de [H2] est écrite dans le cadre quasi-déployé et la Satz 3.4 l'est uniquement pour G déployé mais la preuve vaut aussi pour le cas quasi-déployé.

Le théorème suivant généralise la surjectivité de $i_* : H^1(\mathbb{P}^1_k, S) \to H^1(\mathbb{P}^1_k, G)$ du théorème précédent. Le plongement $\mathbb{Z} \to k(t)$ défini en envoyant 1 sur t^{-1} induit un morphisme $\widehat{S}^0 \hookrightarrow S(k(t)) = \widehat{S}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} k(t)$. Avec cette convention, on a la décomposition suivante.

Théorème 3.4. (Raghunathan [R], Th. 3.4)

$$G\big(k((t^{-1}))\big) = G\big(k[[t^{-1}]]\big) \cdot \widehat{S}^0 \cdot G(k[t]).$$

On note $e_\infty : H^1(\mathbb{P}^1_k, G) \longrightarrow H^1(k, G)$ l'application correspondant au point $\infty : \mathrm{Spec}(k) \to \mathbb{P}^1_k$. On utilise la décomposition précédente à travers sa conséquence suivante.

Théorème 3.5. *Le morphisme $i_* : H^1(\mathbb{P}^1_k, S) \to H^1(\mathbb{P}^1_k, G)$ induit une bijection*

$$\widehat{S}^0/_kW \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\big(H^1(\mathbb{P}^1_k, G) \xrightarrow{\mathrm{Res}^{\mathbb{A}^1_k}_{\mathbb{P}^1_k} \times ev_\infty} H^1(\mathbb{A}^1_k, G) \times H^1(k, G)\big).$$

Démonstration de th. 3.4 $\Rightarrow$ 3.5. Suivant Bruhat–Tits ([BrT3], lemme 2, page 690), on a $H^1(k,G) = H^1(k[[t]], G)$. La surjectivité de $i_* : H^1(\mathbb{P}^1_k, S) \to \mathrm{Ker}\big(H^1(\mathbb{P}^1_k, G) \to H^1(\mathbb{A}^1_k, G) \times H^1(k,G)\big)$ résulte immédiatement du théorème précédent et de la suite exacte de Nisnevich (cf. appendice, th. 5.1) et la flèche i_* passe au quotient par l'action du groupe fini $_kW$. Il reste à démontrer que $\widehat{S}^0/_kW \to H^1(\mathbb{P}^1_k, G)$ est injective. Pour cela, on choisit un k_s-tore maximal déployé $T_{/k_s} \hookrightarrow G_{k_s}$ contenant $S \times_k k_s$. On note $W = N_{G_{k_s}}(T)/T$. Suivant le §21.8 de [Bo], il existe des ordres compatibles sur les systèmes de racines $\Phi(S,G)$ et $\Phi(T_{k_s}, G_{k_s})$. En d'autres mots, il existe une flèche injective $\widehat{S}^0/_kW \to \widehat{T}^0(k_s)/W$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widehat{S}^0/_kW \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\mathbb{P}^1_k, G) \arrow[d] \\ \widehat{T}^0(k_s)/W \arrow[r] & H^1(\mathbb{P}^1_{k_s}, G) \end{tikzcd}$$

commutatif. Le théorème de Grothendieck–Harder indique l'injectivité de $\widehat{T}^0(k_s)/W \to H^1(\mathbb{P}^1_{k_s}, G)$ et entraîne donc l'injectivité de $\widehat{S}^0/_kW \to H^1(\mathbb{P}^1_k, G)$. $\square$

3.3. La classification.

Le point clef est le théorème suivant.

Théorème 3.6. ([H2], Satz 3.5) *Soit $\Sigma/\mathbb{P}^1_k$ un schéma en groupes semi-simples tel que la fibre générique $\Sigma_{k(t)}$ est anisotrope. Alors Σ est un schéma en groupes constant, i.e., il existe un groupe semi-simple H/k tel que $\Sigma = H \times_k \mathbb{P}^1_k$.*

Il est commode d'utiliser le théorème 3.6 à travers sa conséquence suivante où l'on note $Z^1(k,G)_{\mathrm{an}}$ l'ensemble des cocycles anisotropes, i.e., des cocycles z tels que le groupe tordu $_zG$ soit anisotrope et $H^1(k,G)_{\mathrm{an}}$ l'ensemble des classes anisotropes, i.e., représentées par des cocycles anisotropes.

Théorème 3.7. *On suppose G/k semi-simple. Soit $\gamma \in H^1(\mathbb{P}^1_k, G)$ satisfaisant $ev_\infty(\gamma) = 1 \in H^1(k,G)$ et $\gamma_{k(t)} \in H^1(k(t), G)_{\mathrm{an}}$. Alors $\gamma = 1$ et G est anisotrope.*

Démonstration. On note G_{ad} le groupe adjoint de G, μ le centre de G; on a une suite exacte de groupes algébriques $1 \longrightarrow \mu \longrightarrow G \longrightarrow G_{\mathrm{ad}} \longrightarrow 1$. Soit $\gamma \in H^1(\mathbb{P}^1_k, G)$ satisfaisant $ev_\infty(\gamma) = 1 \in H^1(k,G)$ et $\gamma_{k(t)} \in H^1(k(t), G)_{\mathrm{an}}$; on note γ_{ad} l'image de γ dans $H^1(\mathbb{P}^1_k, G_{\mathrm{ad}})$. On considère la suite exacte de groupes algébriques

$$1 \longrightarrow G_{\mathrm{ad}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \nu \longrightarrow 1,$$

où ν est le k-groupe fini tordu des automorphismes extérieurs de G. On a le diagramme commutatif exact d'ensembles pointés suivant

$$\begin{array}{ccccc} \nu(k) & \longrightarrow & H^1(k, G_{\mathrm{ad}}) & \longrightarrow & H^1(k, \mathrm{Aut}(G)) \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ \nu(\mathbb{P}^1_k) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^1_k, G_{\mathrm{ad}}) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^1_k, \mathrm{Aut}(G)) \end{array}.$$

Comme l'ensemble $H^1(\mathbb{P}^1_k, \mathrm{Aut}(G))$ classifie les schémas en groupe localement isomorphes à G pour la topologie étale, l'hypothèse et le théorème 3.6 impliquent que γ_{ad} provient de $\nu(\mathbb{P}^1_k) = \nu(k)$, donc γ_{ad} est une classe constante et comme $ev_\infty(\gamma_{\mathrm{ad}}) = 1$, on a $\gamma_{\mathrm{ad}} = 1$. On a le diagramme commutatif exact d'ensembles pointés suivant

$$\begin{array}{ccccc} H^1_{\mathrm{fppf}}(k, \mu) & \longrightarrow & H^1(k, G) & \longrightarrow & H^1(k, G_{\mathrm{ad}}) \\ \wr\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1_{\mathrm{fppf}}(\mathbb{P}^1_k, \mu) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^1_k, G) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^1_k, G_{\mathrm{ad}}) \end{array}$$

où l'isomorphisme $H^1_{\mathrm{fppf}}(k, \mu) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{fppf}}(\mathbb{P}^1_k, \mu)$ s'obtient aisèment à partir du lemme 3.1, vu que μ/k est le noyau d'un morphisme surjectif de tores. Le même raisonnement montre que $\gamma = 1$. □

Avec ce résultat, comme Harder l'avait vu, il est aisé de classifier les torseurs sur la droite projective.

Théorème 3.8. (a) *Tout $\mathbb{P}^1_k$-torseur sous G dont la fibre à l'infini est triviale est localement trivial pour la topologie de Zariski, i.e., on a une suite exacte*

$$H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^1_k, G) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1_k, G) \xrightarrow{ev_\infty} H^1(k, G).$$

(b) *L'application naturelle $i_* : H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^1_k, S) \longrightarrow H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^1_k, G)$ induit une bijection $\widehat{S}^0/_k W \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^1_k, G)$.*

Remarque 3.9. Ce théorème classifie les $\mathbb{P}^1_k$-torseurs sous G car quitte à tordre le groupe G/k, on peut toujours supposer qu'un torseur $E/\mathbb{P}^1_k$ a une fibre triviale à l'infini.

Corollaire 3.10. (a) *Soit U un ouvert de Zariski de la droite projective. Alors on a une suite exacte*

$$H^1_{\mathrm{Zar}}(U, G) \longrightarrow H^1(U, G) \xrightarrow{\eta_*} H^1(k(t), G),$$

et une surjection

$$H^1_{\mathrm{Zar}}(U, S) = \widehat{S}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Pic}(U) \longrightarrow H^1_{\mathrm{Zar}}(U, G).$$

(b) (Cf. [CTO], Th. 3.1, p. 109) *Soit A un anneau semi-local de $\mathbb{A}^1_k$. Alors l'application naturelle $H^1(A, G) \to H^1(k(t), G)$ a un noyau trivial.*

Démonstration. (a) Soit E un U-torseur sous G rationnellement trivial. Comme $\mathbb{P}^1_k$ est de dimension 1, on peut recoller E/U avec les torseurs triviaux $G \times_k O_M$ le long de la fibre générique et ainsi le torseur E s'étend en un $\mathbb{P}^1_k$-torseur (non unique) $\widetilde{E}$ sous G. Le torseur $\widetilde{E}$ est rationnellement trivial, suivant le théorème 3.5, $\widetilde{E}$ provient du tore S et est localement trivial pour la topologie de Zariski. On conclut que le U-torseur E est localement trivial pour la topologie de Zariski et provient du tore S.

Le (b) est une conséquence immédiate du (a) par localisation vu que $\mathrm{Pic}(A) = 0$.

Remarque 3.11. Supposons le corps k parfait et infini. Soit C/k une courbe lisse. La preuve du théorème 1.1 ("Deuxième réduction") de [CTO], p. 101 et l'assertion (b) du corollaire implique que tout C-torseur sous G/k rationnellement trivial est localement trivial pour la topologie de Zariski (*loc. cit.*, th. 3.1).

Démonstration du théorème 3.8. (a) On sait que $S \times_k k((t))$ est un $k((t))$-tore déployé maximal de $G_{k((t))}$, et donc a fortiori, le tore $S \times_k k(t)$ est un $k(t)$-tore maximal déployé de $G_{k(t)}$ (cf. [T2], Remark, p. 663). On montre l'assertion plus forte suivante.

Lemme 3.12. *Soit $\gamma \in H^1(\mathbb{P}^1_k, G)$ tel que $ev_\infty(\gamma) = 1$. Alors $\gamma_{/\mathbb{A}^1_k} = 1$ et $\gamma_{/\mathbb{P}^1_k \setminus \{0\}} = 1$.*

Montrons le lemme. On considère la fibre générique $\gamma_\eta \in H^1(k(t), G)$. Si γ_η est anisotrope, le théorème 3.7 montre que $\gamma = 1$ et on a fini. On peut donc supposer la classe γ_η isotrope. Il existe donc un k-sous-groupe parabolique $j : Q/k = Z_G(S_0){\cdot}R_u Q \subset G/k$ (avec $S_0 \subset S$) tel que $\gamma_\eta = j_*(\beta) \in \operatorname{Im}\big(H^1(k(t), Q)_{\mathrm{an}} \to H^1(k(t), G)\big)$. Alors E admet une réduction à Q, i.e., il existe un torseur F sous Q tel que $j_*F \xrightarrow{\sim} E$ et dont la classe de la fibre est β. Or l'application $G(g) \to (G/Q)(k)$ est surjective ([BoT], th. 4.13.a), d'où l'application $H^1(k, Q) \to H^1(k, G)$ un noyau trivial et on a donc $ev_\infty(\beta) = 1$.

On considère les projections $\pi : Q \to Q_{\mathrm{red}} \approx Z_G(S_0)$ et $p : Z_G(S_0) \to Z_G(S_0)/S_0$. Alors $p_*\pi_*F$ est un $\mathbb{P}^1_k$-torseur sous le groupe semi-simple $Z_G(S_0)/S_0$, dont la fibre à l'infini triviale et dont la fibre générique est anisotrope. Le théorème 3.6 montre donc que $p_*\pi_*F$ est isomorphe au torseur trivial. Il résulte que $[\pi_*F]$ provient de $H^1(\mathbb{P}^1, S)$. Ceci montre que $\pi_*F_{/\mathbb{A}^1_k}$ est trivial. Comme $H^1(\mathbb{A}^1_k, R_u Q) = 1$, le torseur $F_{/\mathbb{A}^1_k}$ (et a fortiori $E_{/\mathbb{A}^1_k}$) est trivial. De même, on voit que $E_{/\mathbb{P}^1_k \setminus \{0\}} = 1$.

L'assertion (b) résulte immédiatement du lemme ci-dessus et du théorème 3.5. □

4. Torseurs sur la droite affine

Le but de cette partie est de démontrer le théorème de Raghunathan et Ramanathan, cité dans l'introduction générale.

Théorème 4.1. [RR] *L'application naturelle $H^1(k, G) \to H^1_{\text{ét}}(\mathbb{A}^1_k, G)$ induit une bijection*

$$H^1(k, G) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}\big(H^1_{\text{ét}}(\mathbb{A}^1_k, G) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(\mathbb{A}^1_{k_s}, G)\big).$$

Notre démonstration diffère de la démonstration originale. Cependant, le principe en est le même, inspiré du cas du groupe orthogonal traité par Harder (cf. [Kn], §13) et utilise également la théorie de Bruhat–Tits. D'après [RR], on peut réduire au cas d'un groupe G/k semi-simple, simplement connexe et absolument presque k-simple (§4.1). Donnons le plan de la démonstration. Soit $\xi \in H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}/\mathbb{A}^1, G)$. Pour montrer que la classe ξ est constante (i.e., provient de $H^1(k, G)$), on essaie de la prolonger en une classe sur la droite projective. D'après un lemme de Harder, la classe ξ se prolonge à la droite projective si et seulement si la fibre générique de ξ est régulière à l'infini, c'est-à-dire telle que $\xi_{\widehat{k}_\infty} \in \operatorname{Im}\big(H^1(\widehat{O}_\infty, G) \to H^1(\widehat{k}_\infty, G)\big)$, ce qui est équivalent à $\xi_{\widehat{k}_\infty} \in \operatorname{Im}\big(H^1(k, G) \to H^1(\widehat{k}_\infty, G)\big)$. Plaçons-nous d'abord dans ce cas. La classe ξ est alors la restriction à $\mathbb{A}^1$ d'une classe $\widetilde{\xi}$ de $H^1(\mathbb{P}^1, G)$. Or, la restriction de toute classe de $H^1(\mathbb{P}^1, G)$ à $H^1(\mathbb{A}^1, G)$ est constante, donc la classe ξ est constante (lemme 3.12).

Pour terminer la démonstration, il reste à voir que la fibre générique de ξ est régulière à l'infini: c'est la partie délicate de la démonstration où l'on utilise les applications résidus de Bruhat–Tits. En ajoutant une nouvelle indéterminée, on se sert du cas déjà traité (i.e., le cas où la fibre générique de ξ est régulière à l'infini) pour prouver que le cas régulier est le seul.

4.1. Réductions

Lemme 4.2. ([RR], §2) *Si le théorème principal vaut pour les groupes semi-simples et simplement connexes, alors il vaut pour tout groupe réductif.*

Lemme 4.3. *Si le théorème principal vaut pour les groupes semi-simples, simplement connexes et absolument presque k-simples, alors il vaut pour tout groupe réductif.*

Démonstration. D'après le lemme 4.2, il faut montrer que si le théorème principal vaut pour les groupes semi-simples, simplement connexes et absolument presque k-simples, il vaut pour les groupes semi-simples et simplement connexes. On suppose G simplement connexe. On sait qu'il existe une famille $(k_i/k)_{i=1,\dots,n}$ d'extensions séparables finies de corps et une famille $(G_i/k_i)_{i=1,\dots,n}$ de groupes absolument presque k_i-simples tels que $G = \prod_{i=1,\dots,n} R_{k_i/k} G_i$, [T1]. Le théorème principal passant au produit, on peut supposer que $n = 1$. Posons $d_1 = [k_1 : k]$. On a un isomorphisme $k_1 \otimes_k k_s \xrightarrow{\sim} (k_s)^{d_1}$. Le lemme de Shapiro assure l'égalité $H^1(k, R_{k_1/k}(G_1)) = H^1(k_1, G_1)$ et on a un diagramme commutatif de restrictions

$$\begin{tikzcd}
H^1(\mathbb{A}^1, R_{k_1/k} G_1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}, R_{k_1/k} G_1) \arrow[d, equal] \\
H^1(\mathbb{A}^1_{k_1}, G_1) \arrow[r] \arrow[d, "j^*"'] & H^1((\mathbb{A}^1_{k_s})^{d_1}, G_1) \arrow[d, equal] \\
H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}, G_1) \arrow[r, "\Delta^*"] & H^1((\mathbb{A}^1_{k_s})^{d_1}, G_1)
\end{tikzcd} ,$$

où Δ est l'application diagonale $k_s \to (k_s)^{d_1}$. Le premier cas appliqué à k_1 assure que $H^1(k_1, G_1) = H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}/\mathbb{A}^1_{k_1}, G_1)$. L'application Δ^* étant injective, on a donc $H^1(k_1, G_1) = \operatorname{Ker}\bigl(H^1(\mathbb{A}^1_{k_1}, G_1) \to H^1((\mathbb{A}^1_{k_s})^{d_1}, G_1)\bigr)$. Donc $H^1(k, R_{k_1/k} G_1) = H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}/\mathbb{A}^1_k, R_{k_1/k} G_1)$. $\square$

4.2. Spécialisation et suite exacte de localisation

On suppose désormais que G/k est semi-simple simplement connexe et absolument presque k-simple. On sait ([BrT3], lemme 3.9) que pour tout point fermé M de $\mathbb{P}^1$, l'application naturelle $\ell_M : H^1(\widehat{O}_M, G) \to H^1(\widehat{k}_M, G)$ est injective. Cela permet de définir une application de spécialisation en M

$$ev_M : \operatorname{Ker}\bigl(H^1(k(t), G) \longrightarrow H^1(\widehat{k}_M, G)/H^1(\widehat{O}_M, G)\bigr) \longrightarrow H^1(k(M), G).$$

Si $\beta \in \operatorname{Ker}\bigl(H^1(k(t), G) \to H^1(\widehat{k}_M, G^1)/H^1(\widehat{O}_M, G)\bigr)$, on notera parfois $\beta(M) = ev_M(\beta)$.

Lemme 4.4. *Soit H/k un groupe réductif (connexe). L'application*

$$H^1(k,H) \longrightarrow H^1(k(t),H)$$

est injective.

Démonstration. Si le corps k est infini, le lemme est clair via un argument de spécialisation. Si le corps k est fini, l'ensemble $H^1(k,H)$ est trivial ([S1], §II.14) et il n'y a rien à démontrer. □

Proposition 4.5. *On a une suite exacte d'ensembles pointés*

$$1 \longrightarrow H^1(k,G) \longrightarrow H^1(k(t),G) \longrightarrow \coprod_{M\in\mathbb{P}^1_k} H^1(\widehat{k}_M,G)/H^1(\widehat{O}_M,G).$$

Démonstration. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer l'exactitude de la suite en $H^1(k(t),G)$. Soit $\beta=\beta(t)\in \mathrm{Ker}\big(H^1(k(t),G)\to \coprod_{M\in\mathbb{P}^1_k} H^1(\widehat{k}_M,G)/H^1(\widehat{O}_M,G)\big)$. D'après un lemme de Harder ([H1], lemme 4.1.3), il existe $\gamma\in H^1(\mathbb{P}^1,G)$ satisfaisant $\gamma_\eta=\beta$. Le théorème 3.8.a et un argument de torsion montre que $\beta\in \mathrm{Im}\big(H^1(k,G)\to H^1(k(t),G)\big)$. □

4.3. Démonstration du théorème principal

Soit $\xi\in H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}/\mathbb{A}^1,G)$. On note $\xi_\eta\in H^1(k(t),G)$ la classe générique de ξ. On veut montrer que l'on peut prolonger la classe ξ à la droite projective. On va discuter les deux cas suivants :

(1) $(\xi_\eta)_{\widehat{k}_\infty}\in \mathrm{Im}(H^1(\widehat{O}_\infty,G)\to H^1(\widehat{k}_\infty,G))$ et
(2) $(\xi_\eta)_{\widehat{k}_\infty}\notin \mathrm{Im}(H^1(\widehat{O}_\infty,G)\to H^1(\widehat{k}_\infty,G))$.

Lemme 4.6. *Soit $\xi\in H^1(\mathbb{A}^1,G)$ tel que $(\xi_\eta)_{\widehat{k}_\infty}\in \mathrm{Im}\big(H^1(\widehat{O}_\infty,G)\to H^1(\widehat{k}_\infty,G)\big)$. Alors ξ est constante, i.e., $\xi\in \mathrm{Im}\big(H^1(k,G)\to H^1(\mathbb{A}^1,G)\big)$.*

Démonstration. Soit ξ comme dans l'énoncé. La classe ξ se prolonge en $\widetilde{\xi}$ de $H^1(\mathbb{P}^1,G)$. On tord le groupe G par un 1-cocycle z représentant $ev_\infty(\widetilde{\xi})$. Alors la classe $\tau_z^{-1}(\widetilde{\xi})\in H^1(\mathbb{P}^1_k,{}_zG)$ satisfait $ev_\infty\big(\tau_z^{-1}(\widetilde{\xi})\big)=1$ et le lemme 3.12 montre que la restriction de $\tau_z^{-1}(\widetilde{\xi})$ à $\mathbb{A}^1_k$ est triviale. Par suite, $\tau_z^{-1}(\xi)=1$ dans $H^1(\mathbb{A}^1_k,{}_zG)$, donc $\xi=\mathrm{Res}_k^{\mathbb{A}^1_k}([z])\in H^1(\mathbb{A}^1_k,G)$ est constante. □

Proposition 4.7. *On a dans la catégorie des ensembles pointés une suite exacte:*

$$1 \longrightarrow H^1(k,G) \longrightarrow H^1(k(t),G) \longrightarrow H^1(\widehat{(k_s)}_\infty,G)\times \coprod_{M\in\mathbb{A}^1_k} H^1(\widehat{k}_M,G)/H^1(\widehat{O}_M,G),$$

où $\widehat{(k_s)}_\infty = k_s\big(\big(\tfrac{1}{t}\big)\big)$.

Si G est le groupe orthogonal $O(q)$ d'une forme quadratique hyperbolique sur un corps de base k de caractéristique distincte de 2, l'ensemble $H^1(k,O(q))$ classifie les formes quadratiques non dégénérées de même rang que q. On a donc une injection $H^1(k,O(q))\hookrightarrow W(k)$ dans le groupe de Witt $W(k)$ qui montre que la suite exacte de la proposition est l'analogue de la suite exacte de Milnor–Tate sur les groupes de Witt (cf. [Sc], §6.3).

Démonstration. D'après la proposition 4.5, on a une suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \longrightarrow H^1(k,G) \longrightarrow H^1(k(t),G) \longrightarrow \coprod_{M\in \mathbb{P}^1_k} H^1(\widehat{k}_M,G)/H^1(\widehat{O}_M,G).$$

Il faut donc montrer l'exactitude en $H^1(k(t),G)$ de la suite d'ensembles pointés de la proposition. Posons $F=k(t)$. Soit

$$\beta \in \operatorname{Ker}\bigl(H^1(F,G)\to H^1(\widehat{(k_s)}_\infty,G)\times \coprod_{M\in\mathbb{A}^1_k} H^1(\widehat{k}_M,G)/H^1(\widehat{O}_M,G)\bigr).$$

On doit montrer que β est régulière à l'infini. La classe β est la restriction de $\gamma\in H^1(\mathbb{A}^1,G)$. Quitte à tordre le groupe G par un cocycle représentant $\gamma(0)$, on peut supposer que $\gamma(0)=1$ et on est ramené à montrer que $\beta=1$. On va utiliser ici les applications résidus de la théorie de Bruhat–Tits, c'est le point crucial de la démonstration du théorème principal. Comme $\beta_{\widehat{k}_{s,\infty}}=1$ dans $H^1(\widehat{(k_s)}_\infty,G)$, la proposition 2.3 assure l'existence d'un entier de "torsion" d tel que

$$\beta_{\widehat{k}_\infty(\frac{1}{\sqrt[d]{t}})}\in \operatorname{Im}\Bigl(H^1\bigl(\widehat{O}_\infty[\frac{1}{\sqrt[d]{t}}],G\bigr)\longrightarrow H^1\bigl(\widehat{k}_\infty(\frac{1}{\sqrt[d]{t}}),G\bigr)\Bigr).$$

L'astuce consiste à d'introduire une indéterminée supplémentaire u. Posons $L=k(u,t,x)$ où $x=\sqrt[d]{ut}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & L=k(u,t,x) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ k(u) \arrow[dr, dash] & & F=k(t) \arrow[dl, dash] \\ & k & \end{tikzcd} \cdot$$

Appliquons la suite exacte de localisation sur $\mathbb{P}^1_k$ au corps de base $k(u)$ et au corps à une indéterminée $L=k(u)(x)$. On a la suite exacte

$$\begin{array}{l} 1\longrightarrow H^1(k(u),G)\longrightarrow H^1(k(u)(x),G)\longrightarrow \coprod_{N\in\mathbb{P}^1_{k(u)}} H^1(\widehat{k}_N,G)/H^1(\widehat{O}_N,G) \\ \qquad\qquad \gamma(u)\longmapsto \beta_L=\beta(x^d/u) \end{array}.$$

On a ainsi forcé la classe β_L à être régulière à l'infini. Par suite,

$$\beta_L\in\operatorname{Im}\bigl(H^1(k(u),G)\to H^1(L,G)\bigr),$$

définissant une classe $\gamma(u)\in H^1(k(u),G)$. On a $\beta\bigl(\frac{x^d}{u}\bigr)=\gamma(u)$. Spécialisant en $x=0$ (cf. §4.2), il vient $\gamma(u)=\beta(0)=1$ et on a $\beta_L=1$. Comme L est isomorphe au corps à une indéterminée $F(x)$, le lemme 4.4 assure que l'application $H^1(F,G)\to H^1(F(x),G)=H^1(L,G)$ est injective. Donc $\beta=1$. $\square$

Cette proposition entraîne le théorème principal (modulo les réductions). En effet, la fibre générique de toute classe $H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}/\mathbb{A}^1_k,G)$ est régulière à l'infini et le lemme 4.6 assure que $H^1(k,G)\xrightarrow{\sim}H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}/\mathbb{A}^1_k,G)$.

5. Appendice: Une suite exacte de Nisnevich.

Soit X un schéma de Dedekind, i.e., un schéma noethérien, régulier, intègre et de dimension 1, dont on note K le corps de fonctions. On note $\eta : \mathrm{Spec}(K) \to X$ le point générique de X et $X^{(1)}$ l'ensemble des points fermés de X. Pour tout point fermé x de X, on note v_x la valuation de K associée et O_x (resp. $\widehat{O}_x$) l'anneau local de X en x (resp. son complété pour v_x). On note $\widehat{K}_x$ le corps des fractions de $\widehat{O}_x$. Soit G/X un schéma en groupes affine et de type fini. On fixe un ouvert U_0 de$X$ de supplémentaire $\Sigma = \{x_1, \dots, x_n\}$. Posons $U_i = \mathrm{Spec}(\widehat{O}_{x_i})$ pour $i = 1, \dots, n$. Remarquons que U_i est un recouvrement de $\mathrm{Spec}(O_{x_i})$ pour la topologie fpqc et que le recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i=0,\dots,n}$ est un recouvrement de X pour la topologie fpqc. Pour $i, j, k = 0, \dots, n$, on prend les notations usuelles $U_{i,j} = U_i \times_X U_j$ et $U_{i,j,k} = U_i \times_X U_j \times_X U_k$. Comme X est de dimension 1, pour tout point x_i de Σ, le morphisme $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(O_{x_i})$ induit des isomorphismes

$$\eta_i : \mathrm{Spec}(\widehat{K}_{x_i}) \approx U_{0,i} \ \text{ et } \ \eta_i^{\mathrm{op}} : \mathrm{Spec}(\widehat{K}_{x_i}) \approx U_{i,0}.$$

De plus, si x_i, x_j sont des points distincts de Σ, on a un isomorphisme naturel

$$\eta_{i,j} : U_{0,i,j} \approx U_{i,j}.$$

L'ensemble des 1-cocycles “normalisés”

$$Z^1(\mathcal{U}, G)_\Delta = \big\{(g_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \in Z^1(\mathcal{U}, G) \mid g_{i,i} = 1 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n\big\}$$

s'applique surjectivement sur l'ensemble de cohomologie de Čech $\check{H}^1_{\mathrm{fpqc}}(\mathcal{U}/X, G)$. On définit

$$\Theta : \textstyle\prod_{i=1,\dots,n} G(\widehat{K}_{x_i}) \to Z^1(\mathcal{U}, G)_\Delta$$

par $\Theta(g) = (g_{i,j})_{i,j=0,\dots,n}$ où

$$\begin{cases} g_{i,i} = 1 \ \text{ pour } i = 1, \dots, n, \\ g_{0,i} = (\eta_i^*)^{-1}(g_i^{-1}) \in G(U_{0,i}) \ \text{ pour } i = 1, \dots, n, \\ g_{i,0} = \big((\eta_i^{\mathrm{opp}})^*\big)^{-1}(g_i) \in G(U_{i,0}) \ \text{ pour } i = 1, \dots, n, \\ g_{i,j} = (\eta_{i,j}^*)^{-1}(g_{i,0} \cdot g_{j,0}^{-1}) \in G(U_{i,j}) \ \text{ pour } i, j = 1, \dots n, \ \ i \neq j. \end{cases}$$

On montre aisément que Θ est un isomorphisme. Comme G/X est affine, la proposition D4 du §6 de [BLR] montre que cette donnée de descente est effective (c'est un énoncé de dimension 1 plus fort que le théorème de descente fidèlement plate de Grothendieck), et produit une application naturelle $Z^1(\mathcal{U}, G)_\Delta \to \mathrm{Tors}(X, G)$. Ainsi, on dispose d'une application, que l'on note encore Θ,

$$\Theta : \textstyle\prod_{i=1,\dots,n} G(\widehat{K}_{x_i}) \longrightarrow \mathrm{Tors}(X, G).$$

On note

$$c_\Sigma(X, G) = \big(\textstyle\prod_{x \in \Sigma} G(\widehat{O}_x) \backslash G(\widehat{K}_x)\big) / G(U_0)$$

et on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} \prod_{i=1,\dots,n} G(\widehat{K}_{x_i}) \arrow[r, "\Theta", "\sim"'] \arrow[d] & Z^1(\mathcal{U}, G)_\Delta \arrow[d] \\ c_\Sigma(X, G) \arrow[r, dashed] & \check{H}^1_{\mathrm{fpqc}}(\mathcal{U}/X, G) \end{tikzcd} .$$

Théorème 5.1. (Nisnevich [N], Th. 2.1) *L'application Θ passe au quotient dans le diagramme ci-dessus et induit une bijection*

$$c_\Sigma(X,G) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}\big[H^1_{\mathrm{fppf}}(X,G) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(U_0,G) \times \prod_{x\in\Sigma} H^1_{\mathrm{fppf}}(\widehat{O}_x,G)\big].$$

Démonstration. Comme $H^1_{\mathrm{fppf}}(X,G) = H^1_{\mathrm{fpqc}}(X,G)$, il suffit de montrer que l'application $c_\Sigma(X,G) \longrightarrow \check{H}^1_{\mathrm{fpqc}}(\mathcal{U},G)$ est bijective. La surjectivité résulte de la surjectivité de $Z^1(\mathcal{U},G)_\Delta \to \check{H}^1_{\mathrm{fpqc}}(\mathcal{U},G)$ et de la surjectivité de Θ. Montrons l'injectivité. Soient g et g' deux éléments de $\prod_{i=1,\dots,n} G(\widehat{K}_{x_i})$ satisfaisant $[\Theta(g)] = [\Theta(g')]$ dans $\check{H}^1_{\mathrm{fpqc}}(\mathcal{U},G)$. Soient $g = (g_i)$ et $g' = (g_i)$ tels que $[\Theta(g)] = [\Theta(g')]$. Il existe un élément $h_i \in G(U_i)$ pour $i = 0,\dots,n$ tel que $g_{i,j} = h_i g'_{i,j} h_j^{-1}$ pour $i,j = 0,\dots,n$. Posons $g'' = (g''_i) = (h_i g_i h_0)_{i=1,\dots,n}$. Alors $\Theta(g'') = \Theta(g')$ donc $g'' = g'$. Par suite, $[g]$ et $[g']$ sont égaux dans $c_\Sigma(X,G)$. □

Remarques 5.2. (i) Notons $c(X,G) = \big(\prod_{x\in X^{(1)}} G(\widehat{O}_x)\backslash G(\widehat{K}_x)\big)/G(K)$. Par limite inductive, on a un isomorphisme

$$c(X,G) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}\big[H^1_{\mathrm{fppf}}(X,G) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(K,G) \times \prod_{x\in X^{(1)}} H^1_{\mathrm{fppf}}(\widehat{O}_x,G)\big].$$

(ii) Si $G = \mathbb{G}_{m,X}$, on retrouve ainsi la bijection entre $\mathrm{Pic}(X)$ et le groupe des diviseurs de X modulo équivalence linéaire.

(iii) Avec les notations ci-dessus, soit $g = (g_i) \in \prod_{i=1,\dots,n} G(\widehat{K}_{x_i})$ et E_g le X-torseur sous G associé par la bijection Θ. Alors le groupe des sections globales $E(G)(X)$ du schéma en groupe tordu par automorphismes intérieurs s'identifie au stabilisateur du point $[g]$ dans $\prod_{x\in\Sigma} G(\widehat{O}_x)\backslash G(\widehat{K}_x)$ pour l'action du groupe $G(U_0)$. De façon précise, on a

$$E(G)(X) \xrightarrow{\sim} G(U_0) \cap \bigcap_{i=1,\dots,n} g_i^{-1} G(\widehat{O}_{x_i}) g_i.$$

Références

[Bo] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics **126**, Springer-Verlag, 1991.

[BoT] A. Borel, J. Tits, *Groupes réductifs*, Publ. Math. IHES **27** (1965), 55–152.

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron Models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **21**, Springer-Verlag, 1990.

[Bou] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie, Ch.* IV, V *et* VI, Masson, 1981.

[BrT1] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local,* I, Publ. Math. IHES **41** (1972), 13–234.

[BrT2] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local,* II, Publ. Math. IHES **60** (1984).

[BrT3] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes algébriques sur un corps local,* III. *Compléments et application à la cohomologie galoisienne*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **34** (1987), 671–698.

[CTO] J.–L. Colliot–Thélène, M. Ojanguren, *Espaces principaux homogènes localement triviaux*, Publ. Math. IHES **72** (1992), 97–122.

[CTS] J.–L. Colliot–Thélène, J.–J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles,* II, Duke Math. J. **54** (1987), 375–492.

[Gi] P. Gille, *Torseurs sur la droite affine et R-équivalence*, Thèse (1994), Université Paris-Sud.

[Gr] A. Grothendieck, *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Am. J. Math. **79** (1957), 121–138.

[H1] G. Harder, *Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen*, Inv. Math. **4** (1967), 165–191.

[H2] G. Harder, *Halbeinfache Gruppenschemata über vollständigen Kurven*, Inv. Math. **6** (1968), 107–149.

[Kn] M. Knebusch, *Grothendieck- und Wittringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen*, Sistzungber. Heidelb. Akad. Wiss. Math **3** (1970), 93–157.

[L] M. Larsen, *Maximality of Galois actions for compatible systems*, Duke Math. J. **80** (1980), 601–630.

[M] J. S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton, 1980.

[N] Ye. A. Nisnevich, *Espaces homogènes localement triviaux sur les schémas en groupes d'anneau de Dedekind*, C.R. Acad. Sci. Paris, tome **299** (1984), 5–8.

[R] M. S. Raghunathan, *Principal bundles admitting a rational section*, Invent. Math. **116** (1994), 409–423.

[RR] M. S. Raghnunathan, A. Ramanathan, *Principal bundles on the affine line*, Proc. Indian Acad. Sci. **93** (1984), 137–144.

[Ro] G. Rousseau, *Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux*, Thèse de doctorat. Publications Mathématiques d'Orsay, No. 221-77.68., U.E.R. Mathématique, Université Paris XI, Orsay (1977).

[S1] J.–P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math. 5, cinquième édition, Springer–Verlag, 1994.

[S2] J.–P. Serre, *Cohomologie galoisienne: Progrès et problèmes*, Séminaire Bourbaki, exposé 783 (1993–94), Astérisque **227** (1995).

[S3] J.–P. Serre, *Exemples de plongements des groupes $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ dans des groupes de Lie simples*, Inv. Math. **124** (1996), 525–562.

[Sc] R. Scharlau, *Introduction to quadratic forms*, Gründlehren der mathematischen Wissenschaften **270**, Springer, 1985.

[SGA3] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1963–1964. Schémas en Groupes. Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. **151–153**, Springer, 1970.

[T1] J. Tits, *Classification of algebraic semisimple groups*, Proc. Symp. Pure. Math (1966), 33–62.

[T2] J. Tits, *Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups*, J. Algebra **131** (1990), 648–677.