

Introduction aux processus stochastiques.

① Définitions

L'objet de la théorie des processus stochastiques (ou aléatoires) est l'étude des phénomènes aléatoires dépendant du temps.

Exemples: Evolution d'actifs financiers (actions, devises, obligations), files d'attente (Service, Réseau téléphonique, ...)

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désignera l'espace de probabilité.
- $\mathbb{T}$ sera l'ensemble des temps (Ex: $\mathbb{R}_+, [0, t_0], \dots$).
- $(E, \mathcal{E})$ désignera l'espace des états, c'est un espace mesurable.

Def: Un processus stochastique à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ basé sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ de variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans $(E, \mathcal{E})$.

et $\omega \in \Omega$, on associe l'application:

$$t \mapsto X_t(\omega)$$

$$\mathbb{T} \longrightarrow E$$

C'est la trajectoire de $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ associée à $\omega \in \Omega$.

On supposera par la suite que $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$.

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,
on dira que $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est $\mathbb{P}$ -presque sûrement
continue si pour $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{array}{ccc} t & \mapsto & X_t(\omega) \\ \mathbb{R}_+ & \mapsto & \mathbb{R}^d \end{array} \text{ est continue.}$$

Notion d'équivalence.

Def: Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $(X'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ deux processus stochastiques
à valeurs dans le même espace d'états $(E, \mathcal{E})$
resp. basés sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$.

Ils sont équivalents si $\forall n \geq 1, \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+,$
 $\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{E},$

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in B_1; \dots; X_{t_n} \in B_n) = \mathbb{P}'(X'_{t_1} \in B_1; \dots; X'_{t_n} \in B_n)$$

La famille des lois des v.a. $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ lorsque
 $\{t_1, \dots, t_n\}$ parcourt l'ensemble des parties
finies non vides de $\mathbb{R}_+$ s'appelle la
famille des lois de dimension finie.

Deux proc. stoch. sont équivalents si ils ont
les mêmes lois de dimension finie.

② Définition de P.A.I. et P.A.I.S.

$$E = \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Déf.

a) $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus à accroissements
indépendants (P.A.I.) si

$$(i) \quad X_0 = 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

$$(ii) \quad \forall n \geq 2 \text{ entier, } \forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n,$$

les v.a. $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

b) $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus à accroissements
indépendants et stationnaires (P.A.I.S.)
si c'est un P.A.I. et si

$$(iii) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+ \text{ r.q. } 0 \leq s < t,$$

la v.a. $X_t - X_s$ a même loi que X_{t-s} .

Remarque:

La notion correspondante à celle de P.A.I.S lorsque l'ensemble des temps est discret est la suivante: on se donne une suite de v.a. i.i.d.

$$(X_k)_{k \geq 1} \text{ et on pose: } S_0 = 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n$$

Marche
aléatoire.

Dans alors voir maintenant que la notion de P.A.I.S. est reliée à celle de semi-groupe de convolution.

Def. Une famille $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$ de probabilités sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est un semi-groupe de convolution si :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+^*)$$

$$\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t.$$

$\mu * \nu$ désigne ici la mesure image de $\mu \otimes \nu$ par l'application $(x, y) \xrightarrow{\varphi} x + y$:

$$\forall B \in \mathbb{R}^d,$$

$$\mu * \nu(B) = \mu \otimes \nu(\varphi^{-1}(B)).$$

Une autre manière de le dire :

Soit X de loi μ } indép. alors
 Y — ν

$X + Y$ est de loi $\mu * \nu$.

Exercice : Soit X, Y r.a.i. de densité f et g .

Calculer la densité de $X + Y$.

Proposition:

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un P.A.I.S. (à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$)
Si $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, μ_t désigne la loi de X_t ,
alors
 $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$ est un semi-groupe de convolution.

Preuve:

$$X_{t+s} = \underbrace{X_s}_{\substack{\text{v.a. indépendantes} \\ \text{et } X_{t+s} - X_s \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_t}} + \underbrace{(X_{t+s} - X_s)}_{\substack{\text{v.a. indépendantes} \\ \text{et } X_{t+s} - X_s \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_t}}$$

$$\Rightarrow \mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t$$

Exercice:

Montrer que deux P.A.I.S. $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $(X'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$
basés resp. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(\Omega', \mathcal{F}', P')$
de même semi-groupe de convolution sont
équivalents.

Remarque: (ce qu'il faut retenir !)

P.A.I.S. " = " Semi-groupe de convolution.

(à équivalence près !!).

Exemples de semi-groupes de convolution sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

1) Si $\mu_t = \delta_{at}$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé,

$(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$ est un semi-groupe de convolution.

2) Si μ_t est la loi de Poisson de paramètre λt ,

(avec $\lambda > 0$ fixé),

$(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$ est un semi-groupe de convolution.

3) Si μ_t est la loi normale $\mathcal{N}(0, t)$,

$(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$ est un semi-groupe de convolution.

Exercices : Démontrer les assertions 1), 2) et 3) ci-dessus

Def.

a) On appelle Processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$

tout P.A.I.S. réel de semi-groupe de convolution

$(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$ où μ_t est la loi de Poisson de paramètre λt

b) On appelle Mouvement Brownien tout P.A.I.S.

réel de semi-groupe de convolution $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$

où μ_t est la loi normale $\mathcal{N}(0, t)$, $\forall t > 0$.

③ - Processus Gaussiens.

Définition: Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus Gaussien réel si:

i) il est à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

ii) $\forall m \geq 1, \forall t_1, \dots, t_m \geq 0$, la v.a. $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$ est Gaussienne.

Définitions:

a) La moyenne m d'un processus Gaussien réel $(X_t)_{t \geq 0}$ est l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto m(t) = \mathbb{E}[X_t]. \end{aligned}$$

Lorsqu'on a : $m(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$, on dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ est Gaussien centré.

b) La covariance c d'un processus gaussien réel $(X_t)_{t \geq 0}$ est l'application

$$\begin{aligned} c: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, t) &\longmapsto c(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t). \end{aligned}$$

Remarque: $\text{Cov}(U, V) = \mathbb{E}[(U - \mathbb{E}(U))(V - \mathbb{E}(V))]$
si U, V de carré intégrables.

Proposition:

L'application c est semi-définie positive ce qui signifie que :

$$(i) \quad c(s, t) = c(t, s), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+.$$

$$(ii) \quad \forall n \geq 1, \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+, \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \\ \sum_{i,j=1}^n a_i a_j c(t_i, t_j) \geq 0.$$

Preuve

La matrice $(c(t_i, t_j))_{i,j=1, \dots, n}$ est la matrice de covariance de la r.a. $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.

C'est donc une matrice symétrique de type positif car

$$0 \leq \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i} \right) = \sum_{i,j=1}^n c(t_i, t_j) a_i a_j.$$

Proposition:

Si $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(X'_t)_{t \geq 0}$ sont deux processus gaussiens réels qui ont même moyenne m et même covariance c , alors $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(X'_t)_{t \geq 0}$ sont équivalents.

Preuve:

Soient $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$. Les r.a. $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ et $(X'_{t_1}, \dots, X'_{t_n})$ sont Gaussiennes, de même espérance

et même matrice de covariance.

Châcême

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique réel.

On a alors : $(X_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien réel si et seulement si c'est un processus Gaussien réel centré, de covariance c avec $c(s, t) = \inf(s, t)$.

Preuve

a) $\Rightarrow$ Si $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement Brownien réel,

alors $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus Gaussien :

- $X_0 = 0$

- $\forall t > 0, X_t \sim \mathcal{N}(0, t)$.

- $\forall m, 2, 0 < t_1 < \dots < t_m,$

$(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$ est gaussienne comme transformée

linéaire de la v.a. gaussienne $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_m} - X_{t_{m-1}})$.

(par $\varphi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_m)$)

- $\mathcal{X}$ est centré car $E[X_0] = 0$

et $E[X_t] = 0, \forall t > 0$ ($X_t \sim \mathcal{N}(0, t)$)

- $c(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t), s < t.$
 $= E[X_s X_t]$

$$\text{Gr } X_s X_t = X_s (X_t - X_s) + X_s^2$$

Donc,

$$E[X_s X_t] = E[X_s \cdot \underbrace{(X_t - X_s)}_{\text{v.a.i. centrée}}] + E[X_s^2]$$

$$= 0 + s = s \wedge t.$$

b) $\Leftarrow$ Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus Gaussien réel centré de covariance c avec $c(s, t) = s \wedge t, \forall s, t \in \mathbb{R}_+$.

• Soit $n \geq 2$ et soient $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

La v.a. $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ a des composantes indépendantes.

En effet, cette v.a. est Gaussienne comme transformée linéaire de la v.a. $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.
(par l'application

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})).$$

Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$ r.q. $i < j \Rightarrow t_i < t_j$

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}, X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) \\ &= E[(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})] \\ &= E[X_{t_i} X_{t_j}] + E[X_{t_{i-1}} X_{t_{j-1}}] - E[X_{t_{i-1}} X_{t_j}] \\ &\quad - E[X_{t_i} X_{t_{j-1}}] \\ &= t_i + t_{j-1} - t_{i-1} - t_j = 0 \Rightarrow C \text{ diagonale} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (X_t)_{t \geq 0}$ est un P.A.I.

Il reste à voir que :

$$X_t - X_s \stackrel{\text{loi}}{=} X_{t-s}, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+ \text{ avec } s < t$$

et que $\forall t > 0, X_t \sim \text{dP}(0, t)$ (car $E(X_t^2) = c(t, t) = t$)

$$X_t - X_s = f(\underbrace{X_s, X_t}_{\text{v.a. Gaussienne}}) \text{ avec } f(x, y) = y - x \text{ linéaire}$$

$\Rightarrow X_t - X_s$ est Gaussienne, centrée de variance

$$\begin{aligned} E[(X_t - X_s)^2] &= E[X_t^2] - 2E[X_s X_t] + E[X_s^2] \\ &= t - 2s + s = t - s \end{aligned}$$